上海中学高二周练卷（二）

2017.9.21

一. 填空题

1. 若线性方程组的增广矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$，解为$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$，则$c_1-c_2=$________

2. 如果行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中的每一个元素不是 1，就是$-1$，那么该行列式的最大值是_____

3. 若$\vec{a}$和$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角大小是________

4. 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$，则该四边形的面积为________

5. 已知$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$是互相垂直的单位向量，若$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$与$\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$的夹角为$60^\circ$，则实数$\lambda$的值为________

6. 在英文版微积分教材《Calaulus》中，对于夹角为θ的向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，定义了$\vec{a}$在$\vec{b}$上的“数量投影”为$|\vec{a}|\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$，还定义了$\vec{a}$在$\vec{b}$上的“向量投影$pr_{\vec{b}}\vec{a}$”，你估计，该书中的“向量投影$pr_{\vec{b}}\vec{a}$”应当是$pr_{\vec{b}}\vec{a}=$________

二. 解答题

1. 已知$\vec{a}$、$\vec{b}$是两个不共线向量，平面内的点A、B、C、D有$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\vec{a}+6\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\vec{a}-2\vec{b}$，问：$A$、$B$、$C$、$D$中是否存在着共线的三点？给出你的结论并说明理由.

2. 求函数$f(x)=\begin{vmatrix} a & -x & -x \\ x & b & -x \\ x & x & c \end{vmatrix}$的最小值，其中$a$、$b$、$c$都是正数.

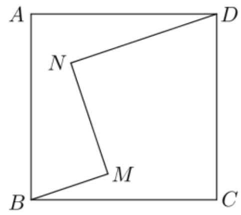
3. 在一个5×5的矩阵中，每一行的 5 个数都从左到右成等差数列，每一列的 5 个数都从上到下成等差数列，并且矩阵中的 25 个数不尽相同，这样的矩阵是否存在？给出你的结论并说明理由.

4. 已知 $2\vec{a}+3\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{j}$，$3\vec{a}+\vec{b}=-8\vec{i}+5\vec{j}$，其中 $\vec{i}$ 与 $\vec{j}$ 是互相垂直的单位向量，若 $\vec{a}+\vec{b}=x\vec{i}+y\vec{j}$（$x$ 和 y 都是实数），试用两种方法求 x 和 y 的值.

5. 在正方形 $ABCD$ 内有折线段 $BMND$，使得 $BM\perp MN$，$MN\perp DN$，并且有 $BM=3$，$MN=4$，$DN=5$，试按下列要求用两种方法求正方形 $ABCD$ 的边长.

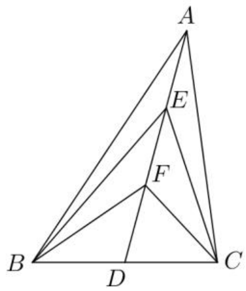
解法一：用适当的方式建立平面直角坐标系求解上述问题.

解法二：不建立坐标，不添加辅助线求解上述问题.



6. 在直角坐标平面上由矩阵乘法规定了一个点变换 $f:P(x,y)\to P'(x',y')$，其中 $(x',y')=(x,y)\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$，证明：这是一个旋转变换，并请求出旋转角 $\theta\ (0<\theta<\pi)$.

7. 如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E、F 是 AD 上的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，求 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值.



参考答案

一. 填空题

1. 16　　2. 2　　3. $\dfrac{\pi}{3}$　　4. 5　　5. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　6. $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{a}^{2}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

二. 解答题

1. A、B、D 三点共线.

2. $x=0$ 时，最小值为 abc.

3. 存在，证明略，如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$.

4. $x=-2$， $y=1$.

5. $2\sqrt{10}$.

6. $\arccos\dfrac{3}{5}$.

7. $\dfrac{7}{8}$