

上海中学高二周练卷（11）

2017.12.21

一. 填空题

1. 若曲线的参数方程为
$$\begin{cases} x = \left| \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right| \\ y = \frac{1}{2}(1 + \sin \theta) \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数, } 0 \leq \theta \leq \pi)$$
, 则该曲线的普通方程

为_____

2. 在平面直角坐标系中, 动圆过点 $A(1,0)$ 且与直线 $l: x=-1$ 相切, 圆心为 C , 若动点 P, M 满足 $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA}$, 则 M 的轨迹方程为_____

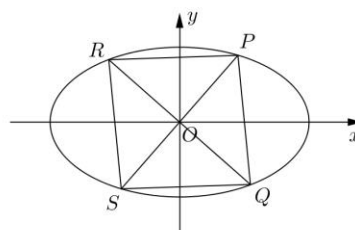
3. 已知双曲线 C_k 的方程为 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{4-k} = 1$, 若 C_k 与直线 $y=x+1$ 有公共点且实轴最长, 则 $k =$ _____

4. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{PF}|^2$ 的最小值为_____

5. 设 $A、B$ 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上位于 x 轴两侧的两点, 若 $\angle AOB$ (O 为原点) 为钝角, 则直线 AB 在 x 轴上的截距的取值范围为_____

一. 解答题

6. 如图, 过原点 O 任意作两条互相垂直的直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 相交于 $P、Q、R、S$ 四点, 设原点 O 到 PQ 边的距离为 d , 试求 $d=1$ 时 $a、b$ 满足的条件.



7. 设 $P(a,b)$ ($ab \neq 0$)、 $R(Q)$ 为坐标平面 xOy 上的点，直线 OR (O 为坐标原点) 与抛物线 $y^2 = \frac{4}{ab}x$ 交于点 Q (异于 O) .

(1) 若对任意 $ab \neq 0$ ，点 Q 在抛物线 $y = mx^2 + 1$ ($m \neq 0$) 上，试问当 m 为何值时，点 P 总在某一圆上，并求出该圆方程 M ；

(2) 对 (1) 中点 P 所在圆方程 M ，设 A 、 B 是圆 M 上两点，且满足 $|OA| \cdot |OB| = 1$ ，试问：是否存在一个定圆 S ，使直线 AB 恒与圆 S 相切.

8. 若正方形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ($x_1 < 0 \leq x_2 < x_3$) 在 $x^2 = 4y$ 上，设 BC 的斜率为 k ， $l = |BC|$.

(1) 求 l 关于 k 的函数解析式 $l = f(k)$ ；

(2) 求此正方形 $ABCD$ 面积 S 的最小值.

参考答案

一. 填空题

1. $y = \frac{1}{2}x^2, x \in [1, \sqrt{2}]$ 2. $y^2 = 2x - 1$ 3. 6 4. 2 5. (0, 4)

二. 解答题

6. $a^2b^2 = a^2 + b^2$.

7. (1) $x^2 + (y-1)^2 = 1$; (2) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

8. (1) $l = f(k) = \frac{4\sqrt{1+k^2}(k^2+1)}{k(k+1)}, k > 0$; (2) $k = 1, S_{\min} = 32$.