**2020-2021年上海中学高二期末数学试卷**

**一、填空题**

1．若复数（，i为虚数单位）是纯虚数，则实数a的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

2．函数（，是虚数单位）的值域可用集合表示为\_\_\_\_\_\_．

3．已知方程表示焦点在轴上的椭圆，则的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_.

4．已知双曲线的一条渐近线方程是，它的一个焦点在抛物线的准线上，则双曲线的方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

5．若点是抛物线的一条弦的中点，且弦的斜率为2，则\_\_\_\_\_\_．

6．把参数方程（为参数，）化成普通方程是\_\_\_\_\_\_．

7．已知*F*是抛物线*y2*=*x*的焦点，*A*、*B*是该抛物线上的两点，|*AF*|+|*BF*|=3，则线段*AB*的中点到*y*轴的距离为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

8．已知复数满足条件，那么的最大值为\_\_\_\_\_\_．

9．若曲线与直线没有公共点，则实数、分别应满足的条件是\_\_\_\_\_\_．

10．已知、是等轴双曲线的左、右焦点，点在上，，则等于\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

11．已知双曲线：的右焦点为，过点向双曲线的一条渐近线引垂线，垂足为，交另一条渐近线于，若，则双曲线的渐近线方程为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

12．直线与抛物线交于、两点，为坐标原点，直线、的斜率之积为，以线段的中点为圆心，为半径的圆与直线交于、两点，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_．

**二、选择题**

13．已知椭圆与双曲线有相同的焦点，则椭圆的离心率为（       ）

A． B． C． D．

14．已知抛物线上存在关于直线对称的相异两点、，则等于（　　）

A．3 B．4 C． D．

15．已知圆的圆心为C，过点且与x轴不重合的直线l交圆A、B两点，点A在点M与点B之间．过点M作直线AC的平行线交直线BC于点P，则点P的轨迹为（   ）

A．圆的一部分 B．椭圆的一部分 C．双曲线的一部分 D．抛物线的一部分

16．数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，如星形线（如图），若让一个半径为的圆在一个半径为的圆内部，沿着圆的圆周滚动，小圆圆周上的任一点形成的轨迹即为星形线，其方程为，给出下列四个结论，正确的有（       ）



（1）星形线的参数方程为：（为参数）

（2）若，则星形线及其内部包含33个整点；（即横、纵坐标均为整数的点）

（3）曲线在星形线的内部（包含边界）；

（4）设星形线围成的面积为，则；

A．（1）（3）（4） B．（1）（2）（3）（4）

C．（2）（3） D．（1）（2）（3）

**三、解答题**

17．已知复数*z=*1*+*i,求实数*a*,*b*使*.*

18．已知关于*x*的二次方程有实根，*a*为复数.求*a*的模的最小值.

19．已知直线与双曲线，则为何值时，直线与双曲线有一个公共点？

20．已知关于*t*的一元二次方程.

(1)当方程有实根时,求点的轨迹;

(2)求方程实根的取值范围.

21．已知抛物线：过点．

（1）求抛物线的焦点到准线的距离；

（2）已知点，过点的直线交抛物线于点、，直线，分别交直线于点、．求的值．

22．已知椭圆，点为椭圆外一点．

（1）过原点作直线交椭圆于、两点，求直线与直线的斜率之积的范围；

（2）当过点的动直线与椭圆相交于两个不同点、时，线段上取点，满足，证明：点总在某定直线上．

1．

【详解】

解：因为复数（，i为虚数单位）是纯虚数，故

2．

【解析】

根据复数的运算性质可函数的值域.

【详解】

，

故答案为：.

3．

【解析】

根据焦点在轴上的椭圆方程的特点得到不等式组，解不等式组即可.

【详解】



因为方程表示焦点在轴上的椭圆，

所以有.

故答案为：

【点睛】

本题考查了已知椭圆焦点的位置求参数取值范围，考查了数学运算能力.

4．

【详解】

由题意得 ,所以双曲线的方程为

5．2

【解析】

设弦的两个端点为，，代入抛物线方程，由点差法可得答案.

【详解】

设弦的两个端点为，，由条件点为的中点，

所以且，显然，则 ，

两式相减，得，所以，

所以，则．

故答案为：2

【点睛】

关键点睛：本题考查直线与抛物线的位置关系，考查中点弦的应用，解答本题的关键是由条件得出且，由点差法得到答案，属于中档题.

6．，

【解析】

利用三角函数恒等变形，消参得到普通方程.

【详解】

，，

所以，．

故答案为：，

7．

【解析】

根据抛物线的方程求出准线方程，利用抛物线的定义抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，列出方程求出*A*，*B*的中点横坐标，求出线段*AB*的中点到*y*轴的距离.

【详解】

由题意得，，准线方程为：，

设，，，

因此，

线段的中点到轴的距离为.

故答案为：.

【点睛】

本题考查抛物线的简单性质，将到焦点的距离转化为其到准线的距离是关键，考查分析运算能力，属于基础题.

8．4

【解析】

由，所以复数对应的点在单位圆上，由表示复数对应的点与复数对应的点之间的距离，根据圆的性质可得答案.

【详解】

因为，所以复数对应的点在单位圆上，

表示复数对应的点与复数对应的点之间的距离，

而．

所以的最大值为.

故答案为：4

9．，

【解析】

由条件作出曲线的图象，根据图象分析出当直线与轴垂直且夹在直线之间.

【详解】

曲线,作出其图像，如图所示，



曲线的图象关于轴对称

若，当时，一次函数的增加的速度比函数 快.

所以当时，若，则的图象与曲线的图象一定有交点.

所以当时，若时，根据的图象与曲线的图象变化情况

可得的图象与曲线的图象一定有交点，

所以当时，不满足条件.

所以，根据图象可得．

故答案为：，

10．

【分析】

利用余弦定理结合双曲线的定义可求得的值.

【详解】

解：∵双曲线的方程为：，∴，得，

由此可得、，焦距，

∵，∴，

即，①

又∵点在双曲线上，∴，

平方得，②

① ②，得，

故答案为：.

11．

【详解】

由题意得双曲线的右焦点*F*(*c*,0)，设一渐近线*OM*的方程为，则另一渐近线*ON*的方程为．设，

∵，

∴，

∴，解得．

∴点M的坐标为，

又，

∴，整理得，

∴双曲线的渐近线方程为．

答案：．

点睛：

（1）已知双曲线的标准方程求双曲线的渐近线方程时，只要令双曲线的标准方程中“1”为“0”就得到两渐近线方程，即方程就是双曲线的两条渐近线方程．

（2）求双曲线的渐进线方程的关键是求出的关系，并根据焦点的位置确定出渐近线的形式，并进一步得到其方程．

12．

【解析】

设直线，与抛物线联立方程，得韦达定理与，代入直线与抛物线表示出与，然后根据，利用数量积代入求解出，从而表示出圆心的坐标，根据平行四边形的四边平方和等于对角线平方和，代入列式，利用二次函数的性质求解最小值.

【详解】

设直线的方程为，，，

由得，所以，

得，，

所以，，

因为直线、的斜率之积为，所以，即，

所以，所以，

所以直线的方程为，，

从而圆心为，

由平行四边形的四边平方和等于对角线平方和（用向量法易证），得



，

所以，

所以当时，的最小值为．

故答案为：

【点睛】

解决直线与抛物线的综合问题时，要注意：

（1）注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、抛物线的条件；

（2）强化有关直线与抛物线联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、向量的数量积、三角形的面积等问题．

13．D

【解析】

根据椭圆与双曲线有相同焦点，即相等列式得，求解，代入求解离心率.

【详解】

由题意得，所以，在椭圆中，，

所以椭圆的离心率.

故选：D

14．C

【详解】

设直线的方程为，由，进而可求出的中点，又由在直线上可求出，∴，由弦长公式可求出．本题考查直线与圆锥曲线的位置关系．自本题起运算量增大．

15．C

【分析】

根据题意找出几何关系，得到，所以，即可得到，所以点P的轨迹是双曲线右支.

【详解】

由已知条件可知 ,

所以三角形是等腰三角形， ,

因为

所以

则三角形BMP是等腰三角形， 

所以

所以点P的轨迹是双曲线的右支．

故选C

【点睛】

本题考查了几何关系的转换和双曲线的定义，是一道综合性较强的题目，属于难题，解题的关键是几何关系的转换，由角的相等得出线段相等而后得到线段的差是一个常数是本题的难点.

16．A

【解析】

根据同角的三角函数的基本关系式可判断（1）（3）的正误，计算出星形线内部整点的个数后可判断（2）的正误，利用两个特殊图象的面积可判断（4）的正误.

【详解】

（1）把代入，此方程成立，故（1）正确；

（2）若，则，显然，

当时，，2个整点，

当时，，2个整点，

当时，，2个整点，

当时，，6个整点，，

当时，，6个整点，，

当时，，11个整点，，…，，

综上，共29个整点，故（2）错误；

（3）曲线的参数方程为（为参数）

星形线的参数方程为（为参数），

因为，

当且仅当或；或时等号成立，

故比距离原点近或两者重合，

故曲线在星形线的内部（包含边界），故（3）正确；

（4）直线交星形线于点，，

数形结合，星形线的围成的面积大于以这两点为直径的圆的面积，

即，

又显然，星形线围成的面积小于以，四点构成的正方形的面积，

即，所以，故（4）正确；

故选：A．

【点睛】

思路点睛：特殊曲线的性质的判断，可根据其指数的特征进行合理的三角换元，也可以根据曲线的特征进行面积的估计.

17．.

【详解】

分析：将z=1+i,根据两个复数相等的条件求a,b.

详解：∵z=1+i,

∴az+2

(a+2z)2=(a+2)2-4+4(a+2)i

=(a2+4a)+4(a+2)i.

∵a,b∈**R**,

∴由复数相等,

∴两式相加整理,

∴所求实数

点睛：（1）本题主要考查复数相等的概念，意在考查学生对该知识的掌握水平和基本的计算能力.(2) 复数相等:.

18．.

【分析】

首先设二次方程的实数根为，代入方程求的，再利用复数模的公式，结合基本不等式，即可求得模的最小值.

【详解】

设为方程的实根，则

，

当即时，.

19．或．

【解析】

联立直线和双曲线方程，就二次项系数分类讨论可得所求的的值.

【详解】

由得，

因为直线与双曲线有一个公共点，

所以或，

解得或．

20．(1)轨迹是以点为圆心,为半径的圆.(2).

【解析】

(1)由复数相等的定义化简得出，将其代入中即可得出所求点的轨迹方程；

(2)将方程的根转化为直线与圆的交点问题，由圆心到直线的距离小于等于半径，即可求得方程实根的取值范围.

【详解】

解:(1)设方程实根为.

根据题意得,

即.

根据复数相等的充要条件,得①

由①得,代入得

即.

所以所求的点的轨迹方程是,

轨迹是以点为圆心,为半径的圆.

(2)由(1)得圆心为,半径,

直线与圆有公共点,

从而有,即,所以.

故方程实根的取值范围是.

【点睛】

本题主要考查了复数相等的定义以及直线与圆的位置关系，属于中档题.

21．（1）；（2）1.

【解析】

（1）求出后可得焦点到准线的距离.

（2）设直线的方程为，，，可用的坐标表示，再联立直线的方程和抛物线的方程，利用韦达定理化简可得所求的值.

【详解】

（1）因为在抛物线上，即，抛物线的焦点到准线的距离为.

（2）显然直线的斜率不为0，故设直线的方程为，

由得，

由得，

设，，则，，所以.

又，，

所以直线：，：，

令，得，，

所以

．

【点睛】

思路点睛：直线与圆锥曲线的位置关系中的定点、定值、最值问题，一般可通过联立方程组并消元得到关于或的一元二次方程，再把要求解的目标代数式化为关于两个的交点横坐标或纵坐标的关系式，该关系中含有或，最后利用韦达定理把关系式转化为若干变量的方程（或函数），从而可求定点、定值、最值问题.

22．（1）；（2）证明见解析.

【解析】

（1）设点，可得，椭圆的有界性可得出，利用斜率公式结合椭圆方程可得出，利用不等式的基本性质可求得的取值范围；

（2）设、、，分析得出直线的斜率存在，设直线的方程为，将直线的方程与椭圆的方程联立，列出韦达定理，由可得出，再由可得出，即可得出结论.

【详解】

（1）设，，

则，

所以，

因为，所以，所以，

所以；

（2）若直线的斜率不存在，则直线的方程为，此时直线与椭圆无公共点，不合乎题意.

所以，直线的斜率存在，设，即，

联立，得，

由得，

设、，则，，

设，由，得（考虑线段在轴的射影），

所以，

于是，整理得，

又，代入上式，得，所以点总在定直线上．

【点睛】

方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为、；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于（或）的一元二次方程，必要时计算；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为、的形式；

（5）代入韦达定理求解.