华二附中高二期中数学试卷

2021.11

一．填空题

1. 空间两条异面直线所成的角的取值范围是________

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的大小为________

3. 若正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $\sqrt{2}$，则异面直线 AB 与 CD 之间的距离为________

4. 将一个正方形绕着它的一边所在的直线旋转一周，所得几何体的体积为 27π，则该几何体的全面积为________

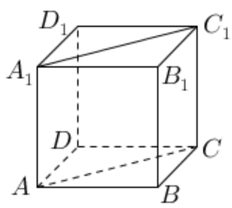
5. 已知圆锥的底面积为 4π，侧面积为 8π，则圆锥的母线与底面所成角的大小为________

6. 有一根长为 3π，底面半径为 1 的圆柱形铁管，用一段细绳在铁管上缠绕 2 圈，并使细绳的两个端点落在圆柱的同一母线的两端，则细绳的最短长度为________

7. 北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用，刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容，用曲率刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于 2π 与多面体在该点的面角之和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和）．例如：正四面体在每个顶点有 3 个面角，每个面角是 $\dfrac{\pi}{3}$，所有正四面体在各顶点的曲率为 $2\pi-3\times\dfrac{\pi}{3}=\pi$，故其总曲率为 4π．则四棱锥的总曲率为________

8. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱两两相互垂直，且该三棱锥的外接球的体积为 36π，则该三棱锥的侧面积的最大值为________

9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是平面 ACC_1A_1 上一动点，且满足 $\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，则满足条件的所有点 P 所围成的平面区域的面积为________



10. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=4$，$SB\ge 7$，$SC\ge 9$，$AB=5$，$BC\le 6$，$AC\le 8$，则三棱锥 $S-ABC$ 体积的最大值为________

二．选择题

11. 已知向量 $\vec{a}=(1,x,-1)$，$\vec{b}=(x,1,1)$，$x\in\mathbf{R}$，则“$x=-1$”是“$\vec{a}\parallel\vec{b}$”的（　　）

A. 充分非必要条件　　　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　　　　　　D. 非充分非必要条件

12. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 若直线 l 与平面 α 上的两条直线垂直，则直线 l 与平面 α 垂直

B. 若两条直线同时垂直于一个平面，则这两条直线平行

C. 若两个平面同时垂直于第三个平面，则这两个平面垂直

D. 若直线 l 上存在不同的两点到平面 α 的距离相等，则直线 l 与平面 α 平行

13. 几何体 Γ 的表面上有三条线段 AB、CD、EF，且 AB、CD、EF 所在直线两两异面，则在① 棱柱；② 棱锥；③ 圆柱；④ 圆锥；⑤ 球中，Γ 有可能是（　　）

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ③④⑤

14. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 BC_1 上的动点，则下列结论中真命题的序号为（　　）

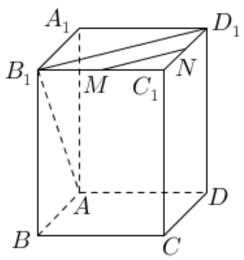
① A_1P // 平面 ACD_1；② $A_1P \perp B_1D$；③ 三棱锥 $P-ACD_1$ 体积不变；

④ P 为 BC_1 中点时，直线 PC 与平面 ACD_1 所成角最大；

A. ①④　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①②③④

三. 解答题

15. 已知 M、N 是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 B_1C_1、C_1D_1 的中点，异面直线 MN 与 AB_1 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



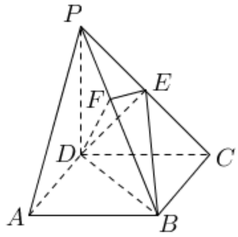
（1）求证：M、N、B、D 在同一平面；

（2）求二面角 $C-MN-C_1$ 的大小.

16. 《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑. 如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，过棱 PC 的中点 E，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F，连接 DE、DF、BD、BE.

（1）证明：$PB\perp$ 平面 DEF，并判断四面体 $DBEF$ 是否是鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论），若不是，说明理由；

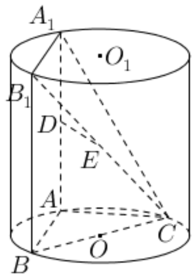
（2）若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\dfrac{DC}{BC}$ 的值.



17. 如图，AA_1、BB_1 为圆柱 OO_1 的母线，BC 是底面圆 O 的直径，D、E 分别是 AA_1、CB_1 的中点，$DE\perp$ 平面 CBB_1.

（1）证明：$DE//$ 平面 ABC；

（2）若 $BB_1=BC$，求 CA_1 与平面 BB_1C 所成角的大小.

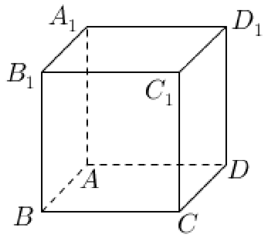


18. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

（1）若正方体的棱长为 1，求点 A 到平面 A_1BD 的距离；

（2）在一个棱长为 10 的密封正方体盒子中，放一个半径为 1 的小球，任意摇动盒子，求小球在盒子中不能达到的空间的体积；

（3）在空间里，是否存在一个正方体，它的定点 A、B、C、D、A_1、B_1、C_1、D_1 到某个平面的距离恰好为 0、1、2、3、4、5、6、7，若存在，求出正方体的棱长，若不存在，说明理由.



2021-2022年上海市华师大二附中高二上期中考

（考试时间: 90 分钟 卷面满分: 100 分）

一、填空题（每题 4 分，满分 40 分）

1. 空间两条异面直线所成的角的取值范围是________

【答案】$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

【解析】由异面直线所成角的定义可知：过空间一点分别作相应直线的平行线，两条相交直线所成的直角或锐角为异面直线所成的角，故两条异面直线所成的角的取值范围是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，直线AC_1与平面ABB_1A_1所成的角大小为 ________

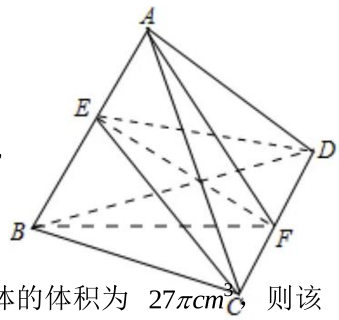
【答案】$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，直线AC_1与平面ABB_1A_1所成的角为$\angle CAC_1$，易得$\angle CAC_1=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 若正四面体$ABCD$的棱长为$\sqrt{2}$，则异面直线AB与CD之间的距离为________

【答案】1

【解析】分别取AB,CD的中点E,F，连接AF,BF,CE,DE



$\therefore CE=DE=AF=BF=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore EF\perp AB$且$EF\perp CD$，则EF的长是异面直线AB与CD的距离，

则$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$

4. 将一个正方形绕着它的一边所在的直线旋转一周，所得几何体的体积为 $27\pi cm^3$，则该几何体的全面积为________ cm^2

【答案】36π

【解析】将一个正方形绕着它的一边所在的直线旋转一周，

所得几何体是圆柱体，设正方形的边长为acm，

则圆柱体的体积为$V=\pi a^2\cdot a=27\pi$，解得$a=3cm$；

$\therefore$该圆柱的侧面积为$S=2\pi\times3\times3=18\pi cm^2$

所以该几何体的全面积为$S=18\pi+2\times\pi\times3^2=36\pi cm^2$，故答案为$36\pi$

5.已知圆雉的底面积为4π，侧面积为8π，则圆锥的母线与底面所成角的大小为________

【答案】$\frac{\pi}{3}$

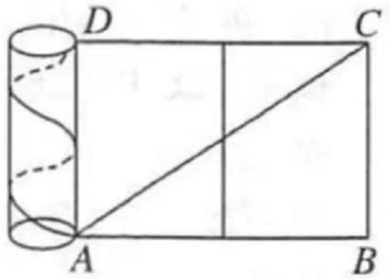
【解析】由圆锥的底面积为$4\pi, \pi r^2=4\pi, r=2$，

圆锥侧面积公式$S=\pi rl=\pi\times 2\times l=8\pi$，解得$l=4$

设母线与底面所成角为θ，则$\cos\theta=\frac{r}{l}=\frac{1}{2}$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$，故答案为：$\frac{\pi}{3}$.

6. 有一根长为$3\pi cm$，底面半径为$1cm$的圆柱形铁管，用一段细绳在铁管上缠绕 2 圈，并使细绳的两个端点落在圆柱的同一母线的两端，则细绳的最短长度为________ cm

【答案】5π



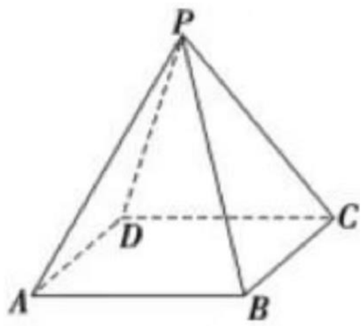
【解析】 把圆柱侧面及缠绕其上的铁丝展开，得到平面矩形 $ABCD$，由题意知$BC=3\pi cm, AB=4\pi cm$，点A与点C分别是铁丝的起、止位置，故线段AC的长度即为铁丝的最短长度

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5\pi cm$

故铁丝的最短长度为$5\pi cm$，故答案为5π.

7.北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用.刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容.用曲率刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于2π与多面体在该点的面角之和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制），多面体面上非顶点的曲率均为零，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和，例如：正四面体在每个顶点有 3 个面角，每个面角是，所以正四面体在各顶点的曲率为$2\pi-3\times\frac{\pi}{3}=\pi$，故其总曲率为$4\pi$，则四棱锥的总曲率为________.

【答案】4π



【解析】由题意可知，四棱锥的总曲率等于四棱锥各顶点的曲率之和，可以从整个多面体的角度考虑，所有顶点相关的面角就是多面体的所有多边形表面的内角的集合，

因为四棱锥有 5 个顶点，5 个面，其中 4 个三角形，1 个四边形，

所以面角和为$4\pi+2\pi=6\pi$，总曲率为$5\times 2\pi-6\pi=4\pi$.

8. 已知三棱锥$P-ABC$的侧棱两两互相垂直，且该三棱锥的外接球的体积为 36π，则该三

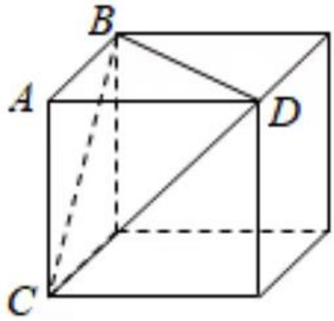
棱锥的侧面积的最大值为________.

【答案】18

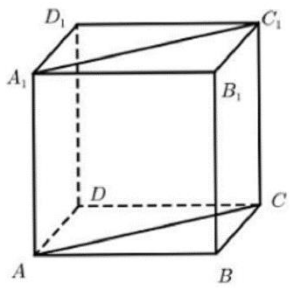
【解析】以该三棱锥的三条侧棱为长、宽、高, 将该三棱锥补成一个长方体，长方体的体对角线就是外接球的直径，令 $AB=x, AC=y, AD=z$，根据三棱雉外接球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=36\pi$，所以球的半径 $r=3$， $\therefore x^2+y^2+z^2=(2\times 3)^2=36.$

$S_{侧}=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xz+\frac{1}{2}yz\le\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{4}\left(x^2+z^2\right)+\frac{1}{4}\left(z^2+y^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=18$ (当且仅当 $x=y=z$ 时，等式成立.)

所以该三棱雉的侧面积的最大值为18，故答案为：18



9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是平面 ACC_1A_1 上一动点，且满足 $\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，则满足条件的所有点 P 所围成的平面区域的面积为________.



【答案】$\frac{3}{2}\pi$

【解析】因为 $\overrightarrow{D_1P}\bullet\overrightarrow{CP}=0$，所以 $D_1P\perp CP$，

故 P 在以 CD_1 为直径的球面上，且 P 在平面 ACC_1A_1 上，

则 P 在面 ACC_1A_1 截球所得的圆上，设该圆半径 r，且正方体棱长为 2，

则 $CD=2\sqrt{2}$，球半径 $R=\frac{1}{2}CD=\sqrt{2}$

连接 B_1D_1，则 $B_1D_1\perp A_1C_1, B_1D_1\perp AA_1$，所以 $B_1D_1\perp$ 平面 ACC_1A_1，

所以 D_1 到平面 ACC_1A_1 的距离 $d_1=\frac{1}{2}B_1D_1=\sqrt{2}$

因为 O 为 CD_1 中点，所以 O 到平面 ACC_1A_1 的距离 $d=\frac{1}{2}d_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以圆半径 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$，圆面积 $S=\pi r^2=\frac{3\pi}{2}$，故答案为：$\frac{3\pi}{2}$.

10. 在三棱锥 $S-ABC$ 中， $SA=4, SB\ge 7, SC\ge 9, AB=5, BC\le 6, AC\le 8$，则三棱

锥 $S-ABC$ 体积的最大值为________.

【答案】$8\sqrt{6}$

【解析】$\because$ 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=4, SB\ge 7$，

$SC\ge 9, AB=5, BC\le 6, AC\le 8$，

$\therefore S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}SA\cdot SB\cdot \sin\angle SAB$，又 $\cos\angle SAB=\frac{SA^2+AB^2-SB^2}{2SA\cdot AB}\le -\frac{1}{5}$，

$\therefore \sin\angle SAB=\sqrt{1-\cos^2\angle SAB}\le\frac{2\sqrt{6}}{5}$，$\therefore S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\sin\angle SAB\le 4\sqrt{6}.$

由于棱雉的高不超过它的侧棱长，设点 C 到面 SAB 的距离为 h，则 $h\le CB\le 6$，

根据三棱锥 $S-ABC$ 体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle SAB}\cdot h\le\frac{1}{3}\times 4\sqrt{6}\times 6=8\sqrt{6}$

事实上，取 $SB=7, BC=6$ 且 $CB\perp$ 平面 SAB 时，可以验证满足已知条件，

此时 $V_{S-ABC}=8\sqrt{6}$，棱锥的体积可以达到最大.

故答案为：$8\sqrt{6}$.

二、选择题（每题 4 分，满分 16 分）

11.已知向量 $\vec{a}=(1,x,-1),\vec{b}=(x,1,1), x\in\mathbf{R}$，则“$x=-1$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（　）

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

【答案】C

【解析】由 $\vec{a}//\vec{b}$，可设 $\vec{a}=k\vec{b}$，

于是 $(1,x,-1)=k(x,1,1)$，$\therefore\begin{cases}1=kx\\x=k\\-1=k\end{cases}\Rightarrow k=-1=x$

$\therefore$“$x=-1$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充要条件，故选：C.

12.下列命题为真命题的是（　）

(A) 若直线 l 与平面 α 上的两条直线垂直，则直线 l 与平面 α 垂直

(B) 若两条直线同时垂直于一个平面，则这两条直线平行

(C) 若两个平面同时垂直于第三个平面，则这两个平面垂直

(D) 若直线 l 上存在不同的两点到平面 α 的距离相等，则直线 l 与平面 α 平行.

【答案】B

【解析】A. 若直线l与平面α上的两条直线垂直，当平面内两条直线平行时，直线l与平面α不一定垂直， A.错；

B. 若两条直线同时垂直于一个平面，则这两条直线平行，这是线面垂直的性质定理， B 正确；C. 若两个平面同时垂直于第三个平面，则这两个平面垂直，这两个平面可以相交，也可以平行，C 错； D. 若直线 l 上的不同两点到平面 α 的距离相等，直线l与平面α可能相交也可能平行，D 错。故选：B.

13.几何体Γ的表面上有三条线段AB,CD,EF，且AB,CD,EF所在直线两两异面，则在①棱柱，②棱锥，③圆柱，④圆锥，⑤球中，有可能是（　　）

(A) ①②③　　(B)①②④　　(C)①③④　　(D)③④

【答案】A

【解析】要使得所在直线两两异面，至少要出现三个面①②③它们都会出现三个面，但是④⑤的话，它们最多就只有两个面，圆锥的话就是两个面，球的话只有一个面，所以它们不可能四五不可能有两两异面的三条直线出现在他们的平面上，故选 A

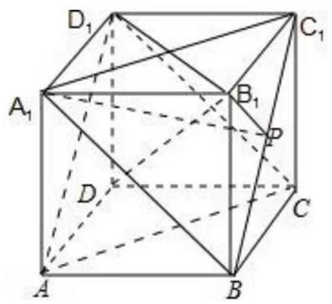
14.在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P是线段BC_1上的动点，则下列结论中真命题的序号为(　　)

①$A_1P\parallel$面ACD_1；②$A_1P\perp B_1D$；③三棱雉$P-ACD_1$体积不变,

④P为BC_1中点时，直线PC与平面ACD_1所成角最大.

(A) ①④　　(B)②④　　(C)①②　　(D) ①③④

【答案】D



【解析】【分析】由题意画出图形，证明平面与平面平行判断①；证明直线与平面垂直判断②；与平面平行，可得P到平面ACD_1的距离不变判定③；由直线与平面所成角的正弦值判定④。

如图，连接A_1B,A_1C_1，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1//CC_1,AA_1=CC_1$，可得四边形AA_1C_1C为平行四边形，得到$A_1C_1//AC$，由$AC\subset$平面$ACD_1,A_1C_1\not\subset$平 面ACD_1，得$A_1C_1//$平面ACD_1，

同理证明$A_1B//$平面ACD_1，又$A_1B\cap A_1C_1=A_1$，可得平面$A_1BC_1//$平面ACD_1.

由点P是线段BC_1上的动点，可得$A_1P//$平面ACD_1，故①正确；

连接B_1D_1，可得$A_1C_1\perp B_1D_1$，再由$DD_1\perp A_1C_1$，而$B_1D_1\cap DD_1=D_1$

得到$A_1C_1\perp$平面B_1D_1D，则$A_1C_1\perp DB_1$，

又因为 DB_1 不可能与 A_1B 垂直，则 A_1P 不可能与 B_1D 垂直，故②错误；

由分析①可知 $BC_1 // $ 平面 ACD_1，则三棱锥 $P-ACD_1$ 体积不变，故③正确；

P 到平面 ACD_1 的距离相等，当 P 为 BC_1 中点时，直线 PC 长度最短，

与平面 ACD_1 所成角的正弦值最大，角最大，故④正确.

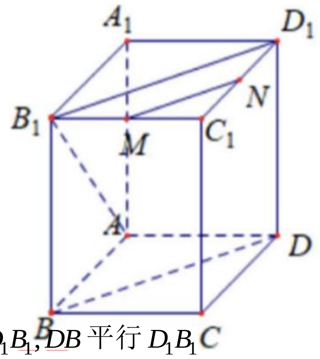
其中正确的序号为①③④，故选：D

三、解答题 (满分 44 分)

15.（满分 10 分）已知 M,N 是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 B_1C_1, C_1D_1 的中点 异面直线 MN 与 AB_1 所成角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1) 求证：M,N,B,D 在同一平面上；

(2) 求二面角 $C-MN-C_1$ 的大小.



【解析】

(1)画出图，连接 MN, DB, D_1B_1

M 是棱 B_1C_1 的中点、N 是棱的 C_1D_1 的中点，MN 平行 D_1B_1，DB 平行 D_1B_1

所以 MN 平行 DB，所以 M,N,B,D 确定一个平面，即 M,N,B,D 在同一平面上；

(2) 由(1)可知 $\angle AB_1D_1$（或其补角）是异面直线 MN 与 AB_1 所成的角，

设底面 $ABCD$ 的边长为 a，正四棱柱高 h，

$AB_1 = \sqrt{a^2+h^2}$，$AD_1 = \sqrt{a^2+h^2}$，$B_1D_1 = \sqrt{2}a$

$\cos\angle AB_1D_1 = \dfrac{a^2+h^2+2a^2-a^2-h^2}{2\sqrt{a^2+h^2}\cdot\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$，解得 $h=2a$，

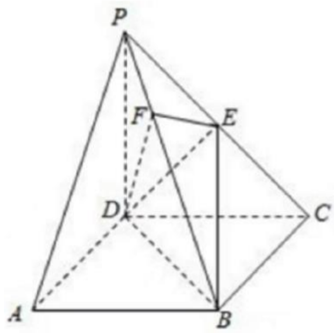
取 MN 的中点 O，因为 $CM=CN, C_1M=C_1N$，

则 $CO\perp MN, C_1O\perp MN, \angle COC_1$ 是二面角 $C-MN-C_1$ 的平面角,

$C_1O=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，$Rt\Delta COC_1$ 中，$\tan\angle COC_1=\dfrac{CC_1}{OC_1}=\dfrac{2a}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=4\sqrt{2}$

二面角 $C-MN-C_1$ 的大小为 $\arctan 4\sqrt{2}$.

16. （满分 10 分）《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑。如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，过棱 PC 的中点 E，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F，连结 DE,DF,BD,BE.



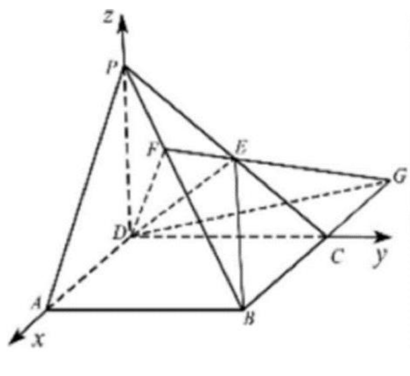
（1）证明：$PB\perp$ 平面 DEF. 并判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

（2）若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\frac{DC}{BC}$ 的值.

【解析】

(1) 如图，以 D 为原点，射线 DA,DC,DP 分别为 x,y,z 轴的正半轴，建立空间直角坐标 系. 设 $PD=DC=1,BC=\lambda$，

则 $D(0,0,0),P(0,0,1),B(\lambda,1,0),C(0,1,0),\overrightarrow{PB}=(\lambda,1,-1)$，点 E 是 PC 的中点，



所以 $E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，于是 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，即 $PB\perp DE$.

又已知 $EF\perp PB$，而 $DE\cap EF=E$，

所以 $PB\perp$ 平面 DEF.

因 $\overrightarrow{PC}=(0,1,-1),\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，则 $DE\perp PC$，所 $DE\perp$ 平面 PBC.

由 $DE\perp$ 面 $PBC,PB\perp$ 平面 DEF，可知四面体 $BDEF$ 的四个面都是直角三角形,

即四面体 $BDEF$ 是一个鳖臑,

其四个面的直角分别为 $\angle DEB,\angle DEF,\angle EFB,\angle DFB$.

(2) 由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量；

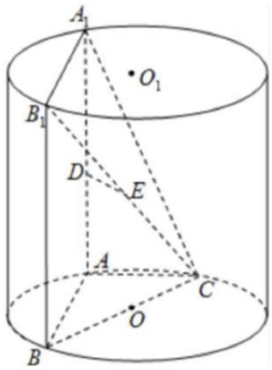
由 (1) 知，$PB\perp$ 平面 DEF，所以 $\overrightarrow{BP}=(-\lambda,-1,1)$ 是平面 DEF 的一个法向量；

若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，

则 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\left|\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{DP}|}\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+2}}\right|=\dfrac{1}{2}$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故当面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17. (满分 10 分) 如图，AA_1,BB_1 为圆柱 OO_1 的母线，BC 是底面圆 O 的直径，D,E 分别是 AA_1,CB_1 的中点，$DE\perp$ 面 CBB_1.



（1）证明：$DE//$ 面 ABC；（2）若 $BB_1=BC$，求 CA_1 与面 BB_1C 所成角的大小.

【解析】(1) 连接 OE，证 $OEDA$ 为平行四边形.

(2) $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

(1) 证明：连接 $EO,OA.\because E,O$ 分别为 B_1C,BC 的中点，

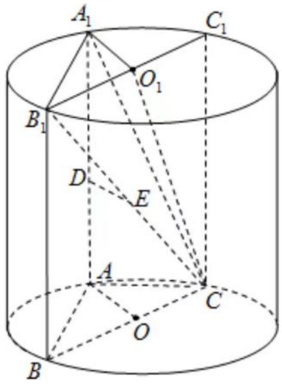
$\therefore EO//BB_1$，

又 $DA//BB_1$，且 $DA=EO=\dfrac{1}{2}BB_1$，$\therefore$ 四边形 $AOED$ 是平行四边形，

即 $DE//OA,DE\not\subset$ 面 $ABC.\therefore DE//$ 面 ABC

(2) 作 C 的母线 CC_1，连接 B_1C_1，则 B_1C_1 是上底面圆 O_1 的直径，连接 A_1O_1，得 $A_1O_1//AO$，又 $AO\perp$ 面 CBB_1C_1，$\therefore A_1O_1\perp$ 面 CBB_1C_1，连接 CO_1，

则 $\angle A_1CO_1$ 为 CA_1 与面 BB_1C 所成的角，



设 $BB_1=BC=2$，则 $A_1C=\sqrt{6}$，$A_1O_1=1$.

在 Rt□A_1O_1C 中，$\sin\angle A_1CO_1=\dfrac{A_1O_1}{A_1C}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

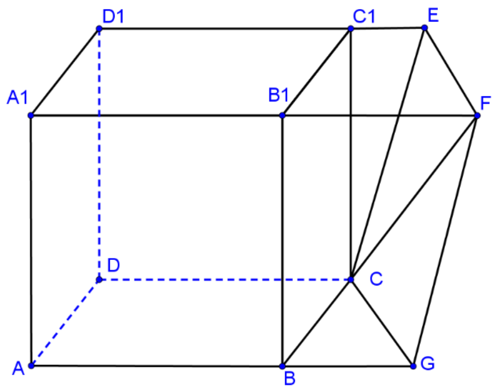
.

18.（满分 14 分）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

(1) 若正方体的棱长为$1cm$，求点 A 到面 A_1BD 的距离;

(2) 在一个棱长为$10cm$的密封正方体盒子中，放一个半径为$1cm$的小球，任意摇动盒子，求小球在盒子中不能达到的空间的体积;

(3) 在空间里，是否存在一个正方体，它的顶点 A,B,C,D,A_1,B_1,C_1,D_1 到某个平面的距离恰好为 $0,1,2,3,4,5,6,7$（单位：cm），若存在，求出正方体的棱长；若不存在，说明理由。



【解析】

(1) $\frac{\sqrt{3}}{3}cm$；(2) $104-\frac{76}{3}\pi cm^3$；

(3) 为符合题意的平面，α 过点 C，延长 D_1C_1,A_1B_1,AB 分别交平面 α 于点 E,F,G 由图可知，点 C,C_1,B,B_1,D,D_1A,A_1 与平面 α 的距离分别应为 $0,1,2,3,4,5,6,7$

因为 D_1E,A_1F,DC,AG 互相平行，所以它们与平面 α 所成的角相等，

故由比例关系得 $C_1E:BG:B_1F:DC:D_1E:AG:A_1F=1:2:3:4:5:6:7$

设正方体的棱长为 $4a$，则 $C_1E=a,BG=2a,B_1F=3a$，

用几何方法可解得 $EF=2\sqrt{5}a,EC=\sqrt{17}a,CF=\sqrt{41}a$，

故 $S_{ECF}=2\sqrt{21}a^2$，由 $CC_1\perp$面 $A_1B_1C_1D_1$，

知 CC_1 为四面体 $C-EC_1F$ 的底面 EC_1F 上的高，

所以由 $V_{C_1-ECF}=V_{C-EC_1F}$，算得点 C_1 到平面 α 距离；

$d=\frac{S_{EC_1F}\cdot CC_1}{S_{ECF}}=\frac{2a^2\cdot 4a}{2\sqrt{21}a^2}=\frac{4\sqrt{21}}{21}a$，实际上已知 $d=1$，所以 $\frac{4\sqrt{21}}{21}a=1$，从而 $a=\frac{\sqrt{21}}{4}$，

所以，正方体棱长为 $4a=\sqrt{21}$，由图知，该正方体存在。