

上海中学高三数学练习 01

2022.09

一. 填空题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x | 0 < x - m < 9\}$, 若集合 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是_____

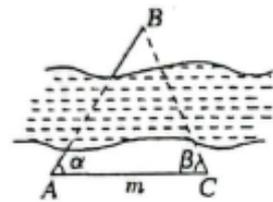
2. 已知幂函数 $f(x) = x^{m^2 - 2m - 3}$ ($m \in \mathbf{Z}$) 为偶函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上是严格减函数, 则 $m =$ _____

3. 若圆柱的轴截面面积为 S , 则它的侧面积为_____

4. 已知 $\frac{z+1}{z-1}$ 为纯虚数, $|z-1| = 1$, 则复数 $z =$ _____

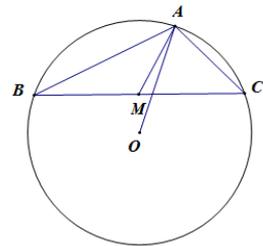
5. 不等式 $\log_{(x-2)}(x^2 - 3x - 4) < 0$ 的解集是_____

6. 如图, 设 A 、 B 两点在河的两岸, 要测量两点之间的距离, 测量者在 A 同侧的河岸边选定一点 C , 测出 $AC = m$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, 则 A 、 B 两点间的距离为_____



7. 过点 $(1, 2)$ 总可以作两条直线与圆 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 - 15 = 0$ 相切, 则实数 k 的取值范围是_____

8. 如图, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, $AB = 4$, $AC = 2$, $\angle BAC$ 为钝角, M 为 BC 边的中点, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} =$ _____



9. 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____

10. 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - 1$ ($\omega > 0$, $\omega \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上没有零点, 则 ω 的取值范围是_____

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e \\ 2 - \ln x, & x > e \end{cases}$, 若 a 、 b 、 c 互不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$,

则 $a + b + c$ 的取值范围为_____

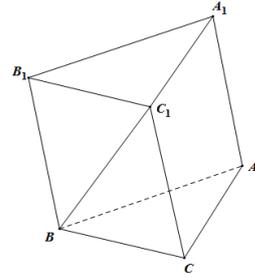
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - 2^{n+1}$, 若不等式 $2n^2 - n - 3 < (5 - \lambda)a_n$ 对任意正整数 n 都成立, 则整数 λ 的最大值为_____

二. 选择题

13. 设 a 、 b 、 c 为正数, 则 “ $a + b > c$ ” 是 “ $a^2 + b^2 > c^2$ ” 的 () 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

14. 如图, 在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 且 $BC_1 \perp AC$, 过 C_1 作 $C_1H \perp$ 底面 ABC , 垂足为 H , 则点 H 在 ()



- A. 直线 AC 上 B. 直线 AB 上
C. 直线 BC 上 D. $\triangle ABC$ 内部

15. 下列四个组方程中表示不相同的曲线的是 ()

- A. $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ 与 $y = \frac{3}{2}x, x \in [-2, 2]$ B. $\begin{cases} x = \tan \theta \\ y = \cot \theta \end{cases} (\theta \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$ 与 $y = \frac{1}{x}$
C. $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ D. $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$ 与 $x = y^2 - y - 1$

16. 已知对任意实数 x , 不等式 $e^x - ax - 1 > 0$ 恒成立, 且关于 x 的方程 $(x - a)\ln x - x - 1 = 0$ 有两根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则下列结论正确的为 ()

- A. $x_1 + x_2 = 2$ B. $x_1 x_2 = 1$ C. $\frac{x_1}{x_2} = 2$ D. $x_2 = e^{x_1}$

三. 解答题

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi, \omega > 0$) 为偶函数, 且函数 $y = f(x)$ 图像的两相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

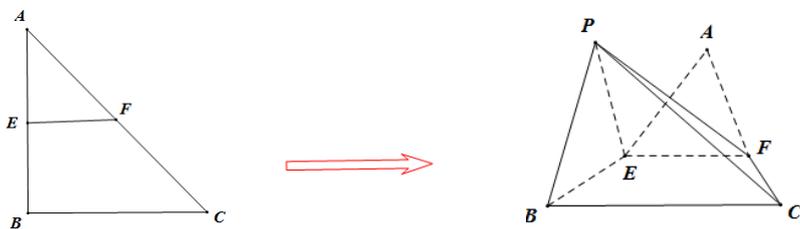
(1) 求 $f(\frac{\pi}{8})$ 的值;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像,

求 $g(x)$ 的单调减区间.

18. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 4$, $\angle ABC = 90^\circ$, E 、 F 分别为边 AB 、 AC 的中点, 以 EF 为折痕把 $\triangle AEF$ 折起, 使 A 点到达点 P 的位置, 且 $PB = BE$.

(1) 证明: $BC \perp$ 平面 PBE ; (2) 求平面 PBE 与平面 PCF 所成锐二面角的大小.



19. 已知直线 $l: y = ax + 1$ 与曲线 $3x^2 - y^2 = 1$ 有两个不同的交点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若交点为 A 、 B 且以 AB 为直径的圆恰过原点, 求 a 的值.

20. 棋盘上标有第 0、1、2、 \dots 、100 站，棋子开始时位于第 0 站，棋手抛掷均匀硬币走跳棋游戏. 若掷出正面，棋子向前跳出一站；若掷出反面，棋子向前跳出两站，直到跳到第 99 站或第 100 站时，游戏结束. 设棋子跳到第 n 站的概率为 P_n .

(1) 当游戏开始时若抛掷均匀硬币 3 次后求棋手所走站数之和 X 的分布列与数学期望；

(2) 证明: $P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{2}(P_n - P_{n-1})$ ($2 \leq n \leq 98$)

(3) 求 P_{99} 、 P_{100} 的值.

21. 已知 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + ax$ ($a \in \mathbf{R}$), $g(x) = e^x + \frac{3}{2}x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的极值点的个数；

(2) 若 $\forall x > 0$, 总有 $f(x) \leq g(x)$;

① 求实数 a 的范围；

② 求证: $\forall x > 0$, 不等式 $e^x + x^2 - (e+1)x + \frac{e}{x} > 2$ 成立.

参考答案

一. 填空题

1. $(-11, 3)$ 2. 1 3. 5π 4. $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 5. $(4, \frac{3+\sqrt{29}}{2})$
 6. $\frac{m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ 7. $(-\frac{8\sqrt{3}}{3}, -3) \cup (2, \frac{8\sqrt{3}}{3})$ 8. 5 9. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 10. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}]$ 11. $(2e + \frac{1}{e}, e^2 + 2)$ 12. $(-\infty, \frac{37}{8})$

二. 选择题

13. B 14. B 15. C 16. B

三. 解答题

17. (1) $\sqrt{2}$; (2) $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}]$, $k \in \mathbf{Z}$

18. (1) 略; (2) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$

19. (1) $(-\sqrt{6}, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{6})$; (2) ± 1

20. (1) 分布列如下表所示, $E(X) = \frac{9}{2}$; (2) 略; (3) $P_{99} = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2^{100}})$, $P_{100} = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2^{99}})$

3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

21. (1) 当 $a < -2$ 时, 有两个极值点, 当 $a \geq 2$ 时, 没有极值点; (2) ① $a \leq e+1$; ② 略