

上海实验学校高三数学练习试卷

2022.09

一. 填空题

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid |x| \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x \mid 2^x \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $A \cap \overline{B}$ 为_____
2. 命题: “若 $a > b$, 则 $a+1 \geq b$ ” 的逆否命题是_____
3. 不等式 $\frac{x+1}{x} \leq 3$ 的解集为_____
4. 某超市中秋前 30 天月饼销售总量 $f(t)$ 与时间 t ($0 < t \leq 30, t \in \mathbf{Z}$) 的关系大致满足 $f(t) = t^2 + 10t + 12$, 则该超市前 t 天平均售出 (如前 10 天的平均售出为 $\frac{f(10)}{10}$) 的月饼最少为_____
5. 已知 $1 \leq a+b \leq 4, -1 \leq a-b \leq 2$, 则 $4a-2b$ 的取值范围为_____
6. 要使关于 x 的不等式 $0 \leq x^2 + ax + 6 \leq 4$ 恰好只有一个解, 则 $a =$ _____
7. 若 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}$, 则满足 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是_____
8. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ -x+2, & x > 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) \geq x^2$ 的解集为_____
9. 已知全集 $I = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid |1 - \frac{x-1}{3}| > 2, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 - m^2 > 0, m > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的充分非必要条件, 则实数 m 的取值范围是_____
10. 若 $e^x - e^y = e$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $2x - y$ 的最小值为_____
11. 设 a, b 为正实数, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, $(a-b)^2 = 4(ab)^3$, 则 $\log_a b =$ _____
12. 已知实数 $x > y > 0$, 则 $xy + \frac{x+2y}{y^2(x-y)}$ 的最小值为_____

二. 选择题

13. 若 a, b 为实数, 则 $a > b > 0$ 是 $a^2 > b^2$ 的 () 条件
A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要
14. 已知 $x > 0, y > 0, x+3y=1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{3y}$ 的最小值为 ()
A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{3}$

15. 设函数 $f(x) = (x^2 - 10x + c_1)(x^2 - 10x + c_2)(x^2 - 10x + c_3)(x^2 - 10x + c_4)(x^2 - 10x + c_5)$, 集合 $M = \{x \mid f(x) = 0\} = \{x_1, x_2, \dots, x_9\} \subseteq \mathbf{N}^*$, 设 $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4 \geq c_5$, 则 $c_1 - c_5$ 为 ()

- A. 20 B. 18 C. 16 D. 14

16. 设整数 $n \geq 4$, 集合 $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, 令集合 $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in X, \text{且三条件 } x < y < z, y < z < x, z < x < y \text{ 恰有一个成立}\}$, 若 (x, y, z) 和 (z, w, x) 都在 S 中, 则下列选项正确的是 ()

- A. $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \notin S$ B. $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \in S$
 C. $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \in S$ D. $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \notin S$

三. 解答题

17. 设 $A = \{2, -1, x^2 - x + 1\}$, $B = \{2y, -4, x + 4\}$, $C = \{-1, 7\}$, 且 $A \cap B = C$, 求 x, y 的值.

18. 已知函数 $f(x) = ax^2 + ax - 2$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 若关于 x 的不等式 $f(x) > -5$ 的解集为 \mathbf{R} , 求 a 的取值范围;
 (2) 当 $a < 0$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) - 3x - 1 \geq 0$.

19. 某温室大棚规定：一天中，从中午 12 点到第二天上午 8 点为保温时段，其余 4 小时为工人作业时段，从中午 12 点连续测量 20 小时，得出此温室大棚的温度 y （单位：度）与时间 t （单位：小时， $t \in [0, 20]$ ）近似地满足函数 $y = |t - 13| + \frac{b}{t + 2}$ 关系，其中， b 为大棚内一天中保温时段的通风量.

(1) 若一天中保温时段的通风量保持 100 个单位不变，求大棚一天中保温时段的最低温度（精确到 0.1°C ）

(2) 若要保持大棚一天中保温时段的最低温度不小于 17°C ，求大棚一天中保温时段通风量的最小值.

20. 对于函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + b - 2$ ($a \neq 0$)，若存在实数 x_0 ，使 $f(x_0) = x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

(1) 当 $a = 2$ ， $b = -2$ 时，求 $f(x)$ 的不动点；

(2) 若对于任何实数 b ，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求实数 a 的取值范围；

(3) 在 (2) 的条件下，若 $y = f(x)$ 的图象上 A 、 B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点，且直线 $y = kx + \frac{1}{2a^2 + 1}$ 是线段 AB 的垂直平分线，求实数 b 的取值范围.

21. 设 n 是正整数, 集合 $A = \{\alpha \mid \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in (0, 1), k = 1, 2, 3, \dots, n\}$,

对于 A 集合中的任意元素 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

记 $M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[(x_1 + y_1 - |x_1 - y_1|) + (x_2 + y_2 - |x_2 - y_2|) + \dots + (x_n + y_n - |x_n - y_n|)]$.

(1) 当 $n = 3$ 时, 若 $\alpha = (1, 1, 0)$, $\beta = (0, 1, 1)$, 求 $M(\alpha, \alpha)$ 和 $M(\alpha, \beta)$ 的值;

(2) 当 $n = 4$ 时, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意元素 α 、 β , 当 α 、 β 相同时, $M(\alpha, \beta)$ 是奇数; 当 α 、 β 不同时, $M(\alpha, \beta)$ 是偶数; 求集合 B 中元素个数的最大值;

(3) 给定不小于 2 的 n , 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于中 B 的任意两个不同的元素 α 、 β , $M(\alpha, \beta) = 0$, 写出一个集合 B , 使其元素个数最多, 并说明理由.

参考答案

一. 填空题

1. $(0,1]$ 2. 若 $a+1 < b$, 则 $a \leq b$ 3. $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ 4. 17
5. $[-2, 10]$ 6. $\pm 2\sqrt{2}$ 7. $(0, 1)$ 8. $[-1, 1]$
9. $(0, 3]$ 10. $\ln(4e)$ 11. -1 12. $2\sqrt{3} + 2$

二. 选择题

13. A 14. C 15. C 16. B

三. 解答题

17. $x = 3, y = -\frac{1}{2}$

18. (1) $[0, 12)$;

(2) 当 $a < -3$ 时, $x \in [-1, \frac{3}{2}]$; 当 $a = -3$ 时, $x \in \{-1\}$; 当 $-3 < a < 0$ 时, $x \in [\frac{3}{a}, -1]$

19. (1) 6.7°C ; (2) 256 个单位

20. (1) -1, 2; (2) $0 < a < 2$; (3) $b \geq -\frac{\sqrt{2}}{4}$

21. (1) $M(\alpha, \alpha) = 2, M(\alpha, \beta) = 1$; (2) 集合 B 中元素个数的最大值为 4;

(3) 令 $B = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \mid \cup S_n \cup S_{n+1}\}$, 则集合 B 的元素个数为 $n+1$ 满足条件.