上海实验学校高二期末数学试卷

2022.06

一. 填空题

1. $P_6^3=$________

2. $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{10}$ 展开式中的常数项是________

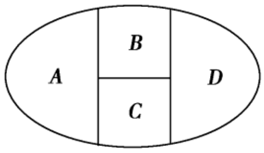
3. 函数 $y=x^3+2x^2+1$ 在 $x=1$ 的导数 $f'(1)=$________

4. 假设某种动物生存到 1 岁的概率为 0.3，生存到 10 岁的概率为 $\frac{1}{4}$，则一只恰好 1 岁的该动物生存到 10 岁的概率为________

5. 某人每天上班通勤有 20%的概率选择骑车，另外各有 40%的概率选择自驾和地铁，已知骑车和自驾的迟到概率各为 10%和 30%，而地铁则保证准时到岗，则该人每天的迟到概率为________（用百分数表示）

6. 已知 $(1-2x)^n$ 关于 x 的展开式中，只有第 4 项的二项式系数最大，则展开式的系数之和为________

7. 函数 $y=\frac{x^2}{\sin x}$ 的导数 $y'=$________



8. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(9,p)$，随机变量 Y 服从二项分布 $B(4,p)$，若 $D[X]=2$，则 $P(Y\ge 1)=$________

9. 如图，用 6 种不同的颜色把图中 A、B、C、D 四块区域分开，若相邻区域不能涂同一种颜色，则不同的涂法共有________

10. 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$，若 $B\ne\varnothing$ 且 $B\subseteq A$，记 $G(B)$ 为 B 中元素的最大值与最小值之和，则对所有的 B，$G(B)$ 的平均值为________

二. 选择题

11. 已知 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=4$，则 a 的值等于（　　）

A. $\frac{19}{3}$　　B. $\frac{10}{3}$　　C. $\frac{16}{3}$　　D. $\frac{13}{3}$

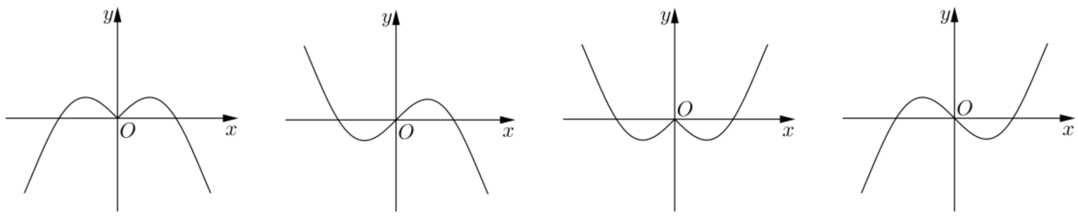
12. 设某生产线所生产的螺母内径（单位：mm）服从正态分布 $N(20,\sigma^2)$，生产标准规定：若产品的内径与标准值 20mm 之间的偏差超过 0.1mm，则划分为不合格品. 现从总数足够多的一大批产品中抽样 1000 件估计合格率，由于技术原因，只能检测出内径超过 20.2mm 的样本共 3 件，内径在 19.8 和 19.9mm 之间的样本共 10 件，则应当估计这批产品的合格率约为（　　）

A. 99.3%　　B. 98.7%　　C. 98.6%　　D. 97.4%

13. 公安部新修订的《机动车登记规定》正式实施后，小型汽车的号牌已经可以采用“自主编排”的方式进行编排. 某人欲选由 A、B、C、D、E 中的两个不同字母，和 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的 3 个不同数字，组成的三个数字都相邻的一个号牌，则他选择号牌的方法种数最多有（　　）种

A. 7200　　B. 14400　　C. 21600　　D. 43200

14. 设函数 $y = x\sin x + \cos x$ 的图像上的点 (x, y) 处的切线斜率为 k，若 $k = g(x)$，则函数 $k = g(x)$ 的图像大致为（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

三. 解答题

15. 设 10 件产品中有 4 件次品，6 件正品，试求下列事件的概率：

（1）从中任取 2 件都是次品；

（2）从中任取 5 件恰有 2 件次品；

（3）从中有放回地任取 3 件都是正品；

（4）从中有放回地任取 3 件至少有 2 件次品.

16. 设函数 $f(x) = ax - \dfrac{b}{x}$，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $7x - 4y - 12 = 0$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式

（2）证明：曲线 $y = f(x)$ 上任一点处的切线与直线 $x = 0$ 和直线 $y = x$ 所围成的三角形面积为定值，并求此定值.

17. 已知$(\sqrt{x}-\frac{2}{x})^n$展开式中第三项的系数比第二项的系数大 162.

（1）求n的值；

（2）求展开式中含x^3的项，并指出该项的二项式系数.

18. 已知$f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$，曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=bx+1$.

（1）求a,b的值；

（2）求$f(x)$在$[0,1]$上的最大值.

四. 附加题

19. 从 1、2、…、n（$n\geq 2$）中等可能地独立抽样两次，记两次的结果分别为随机变量 X 和 Y，记号$\max\{X,Y\}$表示 X、Y 中的较大者.

（1）若做放回抽样，求$A_n=E[\max\{X,Y\}]$；

（2）若做不放回抽样，求$B_n=E[\max\{X,Y\}]$；

（3）计算B_n-A_n，比较A_n与B_n的大小，并尝试定性解释：为何$\{B_n-A_n\}$会有这样的变化趋势？

（可能需要用到的公式：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$）

20. 用记号$\sum\limits_{i=0}^{n}a_i$表示$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，$b_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{2i}$，其中$i\in\mathbf{N}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）设$\sum\limits_{k=1}^{2n}(1+x)^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$（$x\in\mathbf{R}$），求$b_2$的值；

（2）在条件（1）下，记$d_n=1+\sum\limits_{i=1}^{n}[(-1)^i b_i C_n^i]$，且不等式$t\cdot(d_n-1)\le b_n$恒成立，求实数$t$的取值范围.

参考答案

一. 填空题

1. 120　　2. 210　　3. -3　　4. $\frac{5}{6}$　　5. 14%　　6. 1

7. $\frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$　　8. $\frac{80}{81}$ 或 $\frac{65}{81}$　　9. 480　　10. $n+1$

二. 选择题

11. B　　12. D　　13. D　　14. B

三. 解答题

15.（1）$\frac{2}{15}$；（2）$\frac{10}{21}$；（3）$\frac{27}{125}$；（4）$\frac{44}{125}$

16.（1）$f(x) = x - \frac{3}{x}$；（2）6

17.（1）9；（2）9

18.（1）$a=1$，$b=\mathrm{e}-2$；（2）$\mathrm{e}-1$

四. 附加题

19.（1）$\frac{(n+1)(2n+1)}{3n} - \frac{n+1}{2n}$；（2）$\frac{2(n+1)}{3}$；（3）$B_n - A_n = \frac{1}{6}(\frac{n+1}{n}) > 0$，$n$ 越大，有放回和无放回之间的差距越来越小，数据越大，有无放回对第二次结果的影响越小，因此两者之间期望差值就越小.

20.（1）15；（2）$[-1, \frac{5}{3}]$