

交大附中高三开学考数学试卷

2022.09

一. 填空题

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2 - k \mid k \in A\}$, 则 $A \cap B =$ _____

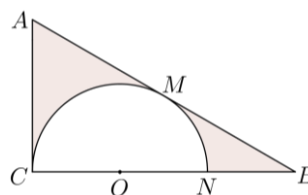
2. 不等式 $|x+1| - |x-3| \geq 0$ 的解集是 _____

3. 已知点 $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$, 则 \overrightarrow{AB} 的单位向量为 _____ (用坐标表示)

4. 已知 $z = 3 + 4i$, 若实数 a, b 满足 $z + a\bar{z} + b|z| = 0$, 则 $a + b =$ _____

5. 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $BC = \sqrt{3}$,

在三角形内挖去一个半圆 (圆心 O 在边 BC 上, 半圆与 AC 、 AB 分别相切于点 C, M 交 BC 于点 N), 则图中阴影部分绕直线 BC 旋转一周所得旋转体的体积为 _____



6. 设 x, y 均为正实数, 且 $2x + 5y = 20$, 则 $\lg x + \lg y$ 的最大值为 _____

7. 一个小球作简谐振动, 其运动方程为 $x(t) = 2\sin(\pi t + \frac{\pi}{3})$, 其中 $x(t)$ (单位: cm) 是小球相对于平衡点的位移, t (单位: s) 为运动时间, 则小球在 $t = 2$ 时的瞬时速度为 _____ cm/s

8. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2 + n} - \frac{y^2}{3m^2 - n} = 1$ 表示双曲线, 且该双曲线的焦距为 4, 则 n 的取值范围是 _____

9. 将 A, B, C, D, E, F 六个字母排成一排, 若 A, B, C 均互不相邻且 A, B 在 C 的同一侧, 则不同的排法有 _____ 种 (用数字作答)

10. 若函数 $y = \ln |a - \frac{1}{1+x}| + b$ 是奇函数, 则 $a^{\frac{1}{b}} =$ _____

11. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 满足 $\{|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, |\vec{d}|\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ 且 $\vec{c} \perp \vec{d}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|$ 最大值是 _____

12. 设 $y = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$ 是以 1 为周期的函数, $f(x) = 2^x \cdot g(x)$, 若函数 $y = f(x)$, $x \in [2, 3]$ 的值域为 $[1, 4]$, 则函数 $y = f(x)$, $x \in [0, 5]$ 的值域为 _____

二. 选择题

13. 函数 $y = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调增区间是 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

14. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立，已知某棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1 、 p_2 、 p_3 ，且 $0 < p_1 < p_2 < p_3$ ，记该棋手连胜两盘的概率为 p ，则（ ）

- A. 该棋手在第二盘与甲比赛， p 最大
- B. 该棋手在第二盘与乙比赛， p 最大
- C. 该棋手在第二盘与丙比赛， p 最大
- D. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

| 甲 | 乙 |
|---------|--------------------|
| 6 1 | 5. |
| 8 5 3 0 | 6. 3 |
| 7 5 3 2 | 7. 4 6 |
| 6 4 2 1 | 8. 1 2 2 5 6 6 6 6 |
| 4 2 | 9. 0 2 3 8 |
| | 10. 1 |

15. 分别统计了甲、乙两位同学16周的各周课外体育运动时长（单位： h ），得如图所示茎叶图，则下列结论中错误的是（ ）

- A. 甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 7.4
- B. 乙同学周课外体育运动时长的样本平均数约为 8.60（按四舍五入精确到 0.01）
- C. 甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值小于 0.4
- D. 乙同学周课外体育运动时长的方差约为 0.80（按四舍五入精确到 0.01）

16. 已知 $f(x) = \sin|x| + |\sin x| + \cos|x| + |\cos x|$ ，给出下述四个结论：

- ① $y = f(x)$ 是偶函数；
- ② $y = f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上为减函数；
- ③ $y = f(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上为增函数；
- ④ $y = f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

其中所有正确结论的编号是（ ）

- A. ①②④
- B. ①③④
- C. ①②③
- D. ①②③④

三. 解答题

17. 已知 $(\frac{1}{4} + x)^6 = \sum_{i=0}^6 a_i x^i$.

- (1) 等比数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1 = a_1$ ，公比 $q = a_4$ ，求 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ 的值；
- (2) 等差数列 $\{c_n\}$ 首项 $c_1 = a_5$ ，公差 $d = a_6$ ，求 $\{c_n\}$ 通项公式和它的前 2022 项和 S_{2022} .

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c \cdot \sin(A-B) = b \cdot \sin(A-C)$. 其中 A 、 B 、 C 为内角, 它们的对边分别为 a 、 b 、 c .

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状; (2) 若 $a = 5$, $\cos A = \frac{12}{13}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, 点 M 是棱 AA_1 的中点, 点 O 是对角线 BD_1 的中点.

(1) 求二面角 $M-BC_1-B_1$ 的大小; (2) 求三棱锥 $M-OBC$ 的体积.

20. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = e^x(cx + d)$, 若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 $P(0, 2)$, 且在点 P 处有相同的切线 l .

(1) 当 $c = 2$ 时, 求 a 、 b 、 d 的值;

(2) 求证: 当且仅当 $c > 0$ 时, 函数 $y = g(x)$ 存在最小值.

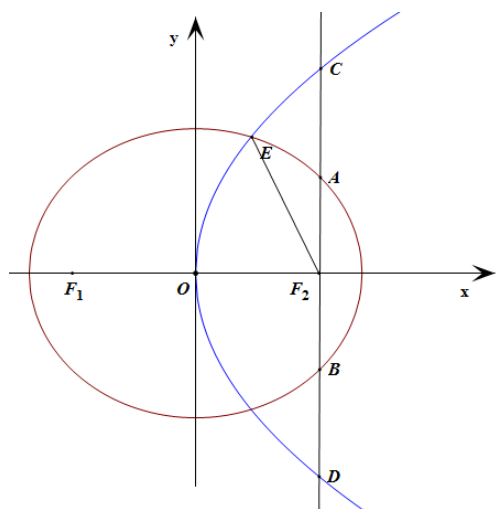
(3) 已知存在 $m \in \mathbf{R}$, 使得 $f(m) \leq g(x)$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求满足 $10c \in \mathbf{Z}$ 的 c 最小值.

21. 已知椭圆 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点 F_2 与抛物线 Γ_2 的焦点重合, Γ_1 的中心与 Γ_2 的顶点重合, 过 F_2 且与 x 轴垂直的直线交 Γ_1 于 A 、 B 两点, 交 Γ_2 于 C 、 D 两点, 且 $|CD| = \frac{12}{5}|AB|$.

(1) 求 Γ_1 的离心率;

(2) 设 E 是 Γ_1 与 Γ_2 的公共点, 若 $|EF_2| = 13$, 求 Γ_1 与 Γ_2 的标准方程;

(3) 直线 $l: y = kx + h$ 与 Γ_1 交于 M 、 N , 与 Γ_2 交于 P 、 Q , 且在直线 l 上按 M 、 P 、 N 、 Q 顺序排列, 若 $|MP| = |PN| = |NQ|$, 求 $|QF_2|$.



参考答案

一. 填空题

1. $\{1\}$ 2. $[1, +\infty)$ 3. $(3, -4)$ 4. $-\frac{1}{5}$
5. $\frac{5\sqrt{3}}{27}\pi$ 6. 1 7. 5π 8. $(-1, 3)$
9. 96 10. $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\ln 2}}$ 11. $\sqrt{13} + \sqrt{17}$ 12. $[\frac{1}{4}, 16]$

二. 选择题

13. D 14. C 15. C 16. D

三. 解答题

17. (1) $\frac{3}{32}$; (2) 2046264
18. (1) 等腰三角形; (2) $\frac{125}{4}$
19. (1) $\arccos \frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{24}$
20. (1) $a=4, b=2, d=2$; (2) 略; (3) 1.9
21. (1) $\frac{2}{3}$; (2) $\Gamma_1: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{125} = 1, \Gamma_2: y^2 = 40x$; (3) 略.