交大附中高二期末数学试卷

2022.06

一. 填空题

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,1\le x\le 4\}$， $B=\{x\,|\,x^2+2x-8\le 0\}$，则 $A\cap B=$________

2. 一次掷两枚骰子，则事件“点数和为 7”的概率为________

3. 某学校模拟社区共有 250 名成员，其中高一学生 88 名，高二学生 112 名，高三学生 50 名. 为了了解成员的情况，需要采用分层抽样的方式抽取 50 名学生进行调查，那么需要在高三年级抽取________人

4. 函数 $y=x^2-1$（$x<-1$）的反函数是________

5. 幂函数 $y=(m^2-m+1)x^m$ 的图像与 y 轴没有交点，则 $m=$________

6. 若关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-1}{x+1}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup(-\dfrac{1}{2},+\infty)$，则实数 $a=$________

7. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $[-2,2]$ 上的函数，对于任意实数 x_1、$x_2\in[-2,2]$，且 $x_1\ne x_2$ 时，恒有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，若函数 $y=f(x)$ 的最大值为 1，则方程 $f(\log_2 x)=1$ 的解为_____

8. 已知 $a>b>1$，若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$，$a^b=b^a$，则 $a+2b=$________

9. 函数 $y=\sum\limits_{i=1}^{2022}|x-i|$ 的最小值为________

10. 若 $a\ge b>0$，$2a+b=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为________

11. 已知 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且图像关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x(2-x)$. 对于闭区间 I，用 M_I 表示 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值，若正实数 k 满足 $M_{[0,k]}=2M_{[k,2k]}$，则 k 的值是________

12. 若函数 $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{ax+2}$ 的值域为 $(0,+\infty)$ 的子集，则实数 a 的取值范围是________

二. 选择题

13. 已知函数 $y=f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}x^4+x^2,\ x>0\\ \cos x,\ x\le 0\end{cases}$，则下列结论正确的是（　　）

A. 函数 $y=f(x)$ 是偶函数　　B. 函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$

C. 函数 $y=f(x)$ 是周期函数　　D. 函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的严格增函数

14. 已知甲、乙两袋中分别装有编号为 1、2、3、4 的四个球. 从甲、乙两袋中各取出一个球，每个球被取出的可能性相同.

事件 A：从甲袋中取出的球的编号是偶数

事件 B：从乙袋中取出的球的编号是奇数

事件 C：取出的两个球的编号都是偶数或都是奇数

给出下列命题：① 事件 A 与事件 B 相互独立；② 事件 B 与事件 C 相互独立；

③ 事件 C 与事件 A 相互独立. 那么这三个命题中真命题的个数为（　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

15. 已知 $y=f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，则“存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $[f(-x_0)]^2\neq[f(x_0)]^2$”是“$y=f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数”的（　　）条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

16. 函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格增，设 $\alpha=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$，$\beta=\dfrac{1}{1+\lambda}$（$\lambda\neq-1$），若 $f(\alpha)-f(\beta)>f(1)-f(0)$，则 λ 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

三. 解答题

17. 记关于 x 的不等式 $1-\dfrac{a+1}{x+1}<0$ 的解集为 P，不等式 $|x+2|<3$ 的解集为 Q.

（1）若 $a=3$，求 P；

（2）若 $P\cup Q=Q$，求实数 a 的取值范围.

18. 已知函数 $y=f(x)$ 的解析式为 $f(x)=a\cdot2^x+b\cdot3^x$，其中常数 a、b 满足 $ab\neq0$.

（1）若 $ab>0$，判断函数 $f(x)$ 是否一定存在反函数，并说明理由；

（2）若 $ab<0$，解不等式 $f(x+2)>f(x)$.

19. 类似巴比伦算法，对于给定的正实数 a，为了计算 $\sqrt[3]{a}$ 的近似值，构造如下数列：选定首项 $x_1>\sqrt[3]{a}$，由递推式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\sqrt{\frac{a}{x_n}})$（$n\in\mathbf{N}^*$）得到数列 $\{x_n\}$，利用数列 $\{x_n\}$ 可以计算 $\sqrt[3]{a}$ 的近似值.

（1）设 $a=100$，$x_1=5$，计算 x_2、x_3 的值(精确到 0.01)；

（2）当 $n\geq 2$ 时，证明：$x_n-x_{n+1}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)$(可以不加证明地使用下面结论：$x_n>\sqrt[3]{a}$)

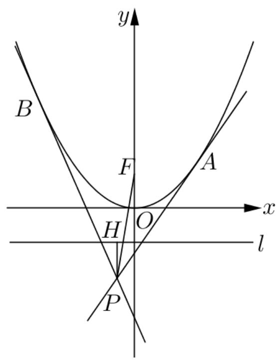
（3）当 $x_1\in[5,10]$ 时，用数列 $\{x_n\}$ 计算 $\sqrt[3]{100}$ 的近似值时，于第 T 步停止，即使用 x_T 作为 $\sqrt[3]{100}$ 的近似值($T\in\mathbf{N}$，$T\geq 2$). 若要求 $|x_T-x_{T+1}|<10^{-4}$，请你估计正整数 T 的值.

20. 如图，已知 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 为二次函数 $y=ax^2$($a>0$)的图像上异于顶点的两个点，曲线 $y=ax^2$ 在点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 处的切线相交于点 $P(x_0,y_0)$.

（1）利用抛物线的定义证明：曲线 $y=ax^2$ 上的每一个点都在一条抛物线上，并指出这条抛物线的焦点坐标和准线方程；

（2）求证：x_1、x_0、x_2 成等差数列，y_1、y_0、y_2 成等比数列；

（3）设抛物线 $y=ax^2$ 焦点为 F，过 P 作 PH 垂直准线 l，垂足为 H，求证：$\angle BPH=\angle APF$.



21. 对于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$，若存在实数 a 使得 $f(x+a)+f(x)=2$ 对任意实数 x 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 具有性质 $P(a)$；

（1）判断函数 $y=x^2$ 与 $y=1+\sin x$ 是否具有性质 $P(a)$，如具有性质 $P(a)$，请写出一个实数 a 的值；若不具有性质 $P(a)$，请说明理由；

（2）若函数 $y=f(x)$ 具有性质 $P(2)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=|x-1|$，解不等式 $f(x)\geq\frac{5}{3}$；

（3）已知函数 $y=f(x)$，对于任意实数 x，$f(x+1)=f(x)$ 恒成立，若“$y=f(x)$ 具有性质 $P(\frac{n}{12})$”是“$f(x)=1$ 恒成立”的充分条件，求正整数 n 的所有可能值组成的集合.

参考答案

一. 填空题

1. $[1,2]$　　2. $\frac{1}{6}$　　3. 10　　4. $y=-\sqrt{x+1}$（$x>0$）

5. 0　　6. -2　　7. $x=4$　　8. 8　　9. 1011^2

10. $3+2\sqrt{2}$　　11. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$或$\frac{10-\sqrt{2}}{4}$　　12. $[0,\frac{2}{3}]$

二. 选择题

13. B　　14. B　　15. C　　16. A

三. 解答题

17.（1）$(-1,3)$；（2）$(0,1]$

18.（1）存在；

（2）当$a>0$，$b<0$时，$x<\log_{1.5}(-\frac{3a}{8b})$；当$a<0$，$b>0$时，$x>\log_{1.5}(-\frac{3a}{8b})$

19.（1）4.74、4.67；（2）略；（3）17

20.（1）焦点$(0,\frac{1}{4a})$，准线$y=-\frac{1}{4a}$；（2）略；（3）略

21.（1）$y=x^2$不具有，$y=1+\sin x$具有，$a=(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

（2）$[4k-\frac{4}{3},4k-\frac{2}{3}]$，$k\in\mathbf{Z}$；（3）$\{n\mid n=4k,k\in\mathbf{N}^*\}$