华二附中高三开学考数学试卷

2022.09

一. 填空题

1. 已知 $z=1+\mathrm{i}$（其中 i 为虚数单位），则 $|\overline{z}|=$________

2. 双曲线 $\dfrac{y^2}{9}-x^2=1$ 的虚轴长为________

3. 函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+1$ 的最小正周期为________

4. 不等式 $\dfrac{1}{|x-1|}<\dfrac{1}{2}$ 的解集为________

5. 已知圆锥的高为 4，底面积为 9π，则圆锥的表面积为________

6. $(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+x^3)^5$ 的展开式中，x^8 的系数是________（用数字作答）

7. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格减，且 $f(2)=0$，若 $f(x-1)>0$，则 x 的取值范围是________

8. 已知变量 y 关于 x 的回归方程为 $y=\mathrm{e}^{bx-0.5}$，若对 $y=\mathrm{e}^{bx-0.5}$ 两边取自然对数，可以发现 $\ln y$ 与 x 线性相关，现有一组数据如下表所示，当 $x=5$ 时，预测 y 值为________

x	1	2	3	4
y	e	e^3	e^4	e^6

9. 有 2 男 2 女共 4 名学生被分派去 A、B、C 三个公司实习，每个公司至少 1 人，且 A 公司只收女生，则不同的分派方法数为________

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零，S_n 为其前 n 项和，若 $S_5=0$，则 S_i（$i=1$、2、…、2022）中不同数值的个数为________

11. 已知 $\lambda>0$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\lambda$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=2$，$\vec{c}\cdot\vec{b}=1$，则 $\lambda=$________

12. 对开区间 $I=(a,b)$，定义 $|I|=b-a$，当实数集合 M 为 n 段（n 为正整数）互不相交的开区间 I_1、I_2、$\cdots$、I_n 的并集时，定义 $|M|=\sum\limits_{k=1}^{n}|I_k|$，若对任意上述形式的 $(0,2\pi)$ 的子集 A，总存在 $k\in\mathbf{Z}$，使得 $|A_k|\geq\lambda|A|$，其中 $A_k=\{x\,|\,x\in A,\ |\tan(x+\dfrac{k\pi}{4})|<\sqrt{2}-1\}$，则 λ 的最大值为________

二. 选择题

13. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“$q>1$”是“$a_{2022}<a_{2023}$”的（　　）条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

14. 通过随机询问 200 名性别不同的大学生是否爱好踢毽子运动，计算得到统计量 K^2 的观测值 $k \approx 4.892$，参照附表，得到的正确结论是（　　）

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025
k	2.706	3.841	5.024

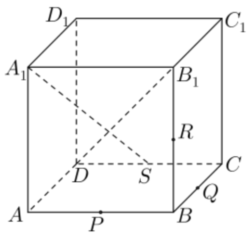
A. 有 97.5%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

B. 有 97.5%以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

C. 在犯错误的概率不超过 5%的前提下，认为“爱好该项运动与性别有关”

D. 在犯错误的概率不超过 5%的前提下，认为“爱好该项运动与性别无关”

15. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P、Q、R、S 分别为棱 AB、BC、BB_1、CD 的中点，联结 A_1S、B_1D，对空间任意两点 M、N，若线段 MN 与线段 A_1S、B_1D 都不相交，则称 M、N 两点可视，下列选项中与点 D_1 可视的为（　　）



A. 点 P　　B. 点 Q　　C. 点 R　　D. 点 B

16. 已知 x_1、y_1、x_2、y_2、x_3、y_3 为 6 个不同的正实数，满足：① $x_1 < y_1$，$x_2 < y_2$，$x_3 < y_3$，② $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3$，③ $(x_1+y_1)(x_3+y_3) = (x_2+y_2)^2$，则下列选项中恒成立的是（　　）

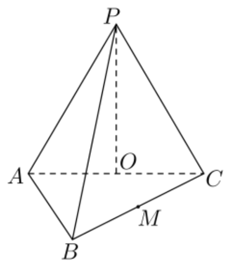
A. $2y_2 < y_1 + y_3$　　B. $2y_2 > y_1 + y_3$　　C. $y_2^2 < y_1y_3$　　D. $y_2^2 > y_1y_3$

三. 解答题

17. 如图所示三棱锥，底面为等边△ABC，O 是 AC 边中点，且 $PO\perp$底面 ABC，$AP = AC = 2$.

（1）求三棱锥体积 V_{P-ABC}；

（2）若 M 为 BC 中点，求 PM 与面 PAC 所成角大小.



18. 设 $f(x)=\cos(x-\varphi)-\sin x$，其中 $\varphi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，已知 $f(\dfrac{\pi}{3})=0$.

（1）求 $f(x)$ 的最小值；

（2）已知凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=AD=14$，$f(A)=\dfrac{1}{7}$，求 $ABCD$ 面积的最大值.

19. 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局. 三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得优胜，已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5、0.4、0.8，各项目的比赛结果相互独立.

（1）求甲学校获得优胜的概率；

（2）用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

20. 设有椭圆方程$\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），直线$l: x+y-6=0$，$\Gamma$ 下端点为 A，左、右焦点分别为$F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，M 在 l 上.

（1）若$a=\sqrt{2}$，AM 中点在 x 轴上，求点 M 的坐标；

（2）直线 l 与 y 轴交于 B，直线 AM 经过右焦点 F_2，且$\cos\angle BMA=\dfrac{3}{5}$，求 b；

（3）在椭圆Γ 上存在一点 P 到 l 距离为 d，使$\sqrt{2}a+d=4\sqrt{2}$，当 a 变化时，求 d 的最小值.

21. 已知$a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\ln(1+x)+a\cdot x\mathrm{e}^{-x}$.

（1）若$a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）若$a>0$，且 $f(x)$ 在其定义域上恰有一个驻点 $x=x_0$，求 x_0；

（3）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上没有零点，证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上也没有零点.

参考答案

一. 填空题

1. $\sqrt{2}$　　2. 2　　3. π　　4. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　5. 24π

6. $\dfrac{5}{2}$　　7. $(-1,3)$　　8. $e^{7.5}$　　9. 14　　10. 2020

11. $\sqrt[4]{5}$　　12. $\dfrac{1}{4}$

二. 选择题

13. D　　14. C　　15. B　　16. D

三. 解答题

17.（1）1；（2）$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

18.（1）-1；（2）$35\sqrt{14}-7\sqrt{42}$

19.（1）0.6；（2）分布列见下表，$E(X)=13$

0	10	20	30
0.16	0.44	0.34	0.06

20.（1）$(5,1)$；（2）$\dfrac{1}{7}$；（3）$2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

21.（1）$y=2x$；（2）$1+\sqrt{2}$；（3）略