

延安中学高二期末数学试卷

2022.06

一. 填空题

1. $2 + \sqrt{3}$ 与 $2 - \sqrt{3}$ 的等比中项为_____
2. 将 3 封不同的信件, 投到 4 个不同的信箱, 有_____种不同的投递方法
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_9 = 20$, $a_{20} = 9$, 则这个数列的公差 $d =$ _____
4. 曲线 $f(x) = \sin x - 2\cos x - 1$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 处的切线方程为_____
5. 从全班 30 位学生中选派 3 人去参加表彰会, 其中正、副班长两人中至少有一人参加, 则不同的选派方式共有_____种
6. 在 11 和 1111 之间, 能被 7 整除的整数共有_____个
7. 某小组 5 男 2 女共 7 人拍照, 其中两名女生恰好相邻的概率为_____
8. 由 0、1、2、3、4、5 这六个数字组成没有重复数字的六位数, 且偶数数字从小到大排列, 这样的六位数有_____个
9. “2021 年 12 月 2 日” 因其数字 “20211202” 的对称性被很多人晒到了朋友圈, 类似这样的对称性的日期, 在二十一世纪还能再遇到_____次
10. $(x^2 + \frac{2}{x})^5$ 的二项展开式中 x^4 的系数为_____
11. “赛龙舟” 是端午节的习俗之一, 也是端午节最重要的节日民俗活动之一, 某单位龙舟队欲参加端午节龙舟赛, 参加训练的 8 名队员中有 3 人只会划左桨, 3 人只会划右桨, 2 人既会划左桨又会划右桨. 现要选派 3 人划左桨、3 人划右桨共 6 人去参加比赛, 则不同的选派方法共有_____种
12. 函数 $f(x) = 2x \cdot f'(1) + x^2$, 则 $f'(2) =$ _____
13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项之和为_____
14. 已知 $(2x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7$, 则 $|a_1| + 2|a_2| + 3|a_3| + 4|a_4| + 5|a_5| + 6|a_6| + 7|a_7| =$ _____

二. 选择题

15. 数列 1、2、2、3、3、3、4、4、4、4、 \dots 、 $\underbrace{n、n、\dots、n}_{n\text{个}}、\dots$ 的第 2022 项的值为 ()
A. 61 B. 62 C. 63 D. 64
16. 在 2022 年北京冬奥会速度滑冰、花样滑冰、冰球三个项目竞赛中, 甲、乙、丙、丁、戊五名同学各自选择一个项目开展志愿服务, 则甲和乙均选择同一个项目, 且三个项目都有人参加的不同方案总数是 ()
A. 18 B. 27 C. 36 D. 48

17. 曲线 $y = x^4$ 在 $x = a_n$ 处的切线经过点 $(a_{n+1}, 0)$, 且 $a_1 = 1$, 则 $\sum_{i=1}^{10} a_i =$ ()

- A. $4 - 4 \times (\frac{4}{3})^9$ B. $4 - 4 \times (\frac{4}{3})^{10}$ C. $4 - 4 \times (\frac{3}{4})^9$ D. $4 - 4 \times (\frac{3}{4})^{10}$

18. $(x + 2y + z)^{11}$ 的展开式为多项式, 其展开式经过合并同类项后的项数一共有 ()

- A. 72 项 B. 75 项 C. 78 项 D. 81 项

三. 解答题

19. 有甲、乙等 7 名同学排成一列照相, 求下列排法种数:

(1) 甲乙两人不相邻; (2) 甲在排头并且乙不在末尾.

20. 求下列函数的导数:

(1) $f(x) = 3x^4 + \sin x$; (2) $f(x) = \sqrt{x} \ln x - e^{2x-1}$.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = 2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 设 $b_n = (4n^2 - 1)a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

22. 已知 $(3x + \frac{1}{x})^n$ 的二项展开式中, 二项式系数之和为 64.

(1) 求 n 的值; (2) 求 $(x^2 + \frac{1}{x}) \cdot (3x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中的常数项.

23. 某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两个桥墩相距 m 米，余下的工程只需要建两端桥墩之间的桥面和桥墩，经预测，一个桥墩的工程费用为 256 万元，距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2 + \sqrt{x})x$ 万元. 假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其他因素，记余下工程的费用为 y 万元.

- (1) 试写出 y 关于 x 的函数关系式;
- (2) 若 $m = 640$ ，需新建多少桥墩才能使 y 最小?

24. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，对任意实数 x_1, x_2 ，都有 $f(x_1 + x_2) = 1 + f(x_1) + f(x_2)$ ，且 $f(1) = 1$.

- (1) 若对任意正整数 n ，有 $a_n = f\left(\frac{1}{2^n}\right) + 1$ ，求 a_1, a_2 的值，并证明 $\{a_n\}$ 为等比数列;
- (2) 设对任意正整数 n ，有 $b_n = \frac{1}{f(n)}$ ，若不等式 $b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{2n} > \frac{6}{35} \log_2(x+1)$ 对任意不小于 2 的正整数 n 都成立，求实数 x 的取值范围.

参考答案

一. 填空题

1. ± 1 2. 4^3 3. -1 4. $2x - y - \pi = 0$
5. 784 6. 157 7. $\frac{2}{7}$ 8. 60 9. 7
10. 40 11. 37 12. 0 13. 210 14. 10206

二. 选择题

15. D 16. C 17. D 18. C

三. 解答题

19. (1) 3600; (2) 600

20. (1) $f'(x) = 12x^3 + \cos x$; (2) $\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} - 2e^{2x-1}$

21. (1) $\frac{2}{2n-1}$; (2) $2n^2 + 4n$

22. (1) 6; (2) 135

23. (1) $y = \frac{256m}{x} + m\sqrt{x} + 2m - 256$ ($0 < x < m$); (2) 9个

24. (1) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$; (2) $(-1, 3)$