

建平中学高三开学考数学试卷

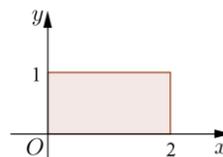
2022.09

一. 填空题

1. 已知集合 $A = \{2, \log_2 m\}$, $B = \{m, n\}$ ($m, n \in \mathbf{R}$) 且 $A \cap B = \{-1\}$, 则 $A \cup B =$ _____

2. 用描述法表示图中的阴影部分可以是_____

3. 若集合 $A = \{x | \frac{x^2}{4} - y^2 = 1\}$, 则 $\bar{A} =$ _____



4. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = m|x|\}$, $B = \{(x, y) | y = x + m\}$,
若集合 $A \cap B$ 中仅含有一个元素, 则实数 m 的取值范围是_____

5. 已知命题: “非空集合 M 的元素都是集合 P 的元素” 是假命题, 则下列命题:

- (1) M 的元素都不是 P 的元素;
- (2) M 的元素不都是 P 的元素;
- (3) M 中有 P 的元素;
- (4) 存在 $x \in M$, 使得 $x \notin P$.

其中真命题的序号是_____ (将你认为正确的命题的序号都填上)

6. 已知集合 $S = \{x | kx^2 + 1 > kx\}$, 若 $S = \mathbf{R}$, 则实数 k 的取值范围是_____

7. 已知集合 $A = \{x | bi \cdot \bar{z} - bi \cdot z + 2 = 0, b \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C}\}$, $B = \{z | |z| = 1, z \in \mathbf{C}\}$,
若 $A \cap B = \emptyset$, 则 b 的取值范围是_____

8. 已知函数 $f(x) = \frac{-4x+5}{x+1}$, $g(x) = a \sin(\frac{\pi}{3}x) + 2a$ ($a > 0$), 若对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in [0, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围为_____

9. 设集合 $A \subseteq \mathbf{R}$, 如果 $x_0 \in \mathbf{R}$ 满足: 对任意 $a > 0$, 都存在 $x \in A$, 使得 $0 < |x - x_0| < a$, 那么称 x_0 为集合 A 的聚点, 则在下列集合中:

- (1) $\mathbf{Z}^+ \cup \mathbf{Z}^-$;
- (2) $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^-$;
- (3) $\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbf{N}^*\}$;
- (4) $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}^*\}$.

以 0 为聚点的集合有_____ (写出所有你认为正确结论的序号)

10. 设集合 $A = \{(x, y) | (x-4)^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | (x-t)^2 + (y-at+2)^2 = 1\}$, 如果命题 “ $\exists t \in \mathbf{R}, A \cap B \neq \emptyset$ ” 是真命题, 则实数 a 的取值范围是_____

11. 已知集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 若实数 λ, μ 满足, 对任意的 $(x, y) \in M$, 均有 $(\lambda x, \mu y) \in M$, 则称 (λ, μ) 是集合 M 的“可行数对”. 以下集合中, 不存在“可行数对”的是_____

- (1) $\{(\lambda, \mu) | \lambda + \mu = 1\}$;
- (2) $\{(\lambda, \mu) | \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\mu^2}{3} = 1\}$;
- (3) $\{(\lambda, \mu) | \lambda^2 - \mu^2 = 1\}$;
- (4) $\{(\lambda, \mu) | \lambda^2 = 4\mu\}$

12. 设集合 $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) \mid x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, \dots, 10\}$, 则集合 A 中满足条件 “ $1 \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{10}| \leq 9$ ” 的元素个数为_____

二. 选择题

13. 设 $m, n \in \mathbf{R}$, 则 “ $mn < 0$ ” 是 “方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 表示的曲线是双曲线” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

14. 已知 $k \in \mathbf{R}$, 则 “对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 \geq kab$ ” 是 “ $k \leq 2$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

15. 对于某一集合 A , 若满足 $a, b, c \in A$, 任取 $a, b, c \in A$ 都有 “ a, b, c 为某一三角形的三边长”, 则称集合 A 为 “三角集”, 下列集合中位三角集的是 ()

- A. $\{x \mid x \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的高的长度}\}$ B. $\{x \mid \frac{x-1}{x-2} \leq 0\}$
C. $\{x \mid |x-1| + |x-3| = 2\}$ D. $\{x \mid y = \log_2(3x-2)\}$

16. 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 点集 $M = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 1\}$, $N = \{(x, y) \mid x + y < 1, |x| < 1, |y| < 1\}$,

$P = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-0.5)^2 + (y+0.5)^2} + \sqrt{(x+0.5)^2 + (y-0.5)^2} < 2\sqrt{2}\}$, 则 ()

- A. $M \subset N \subset P$ B. $N \subset M \subset P$ C. $M \subset P \subset N$ D. 以上皆错

三. 解答题

17. 设 $f(x) = \lg(2a-x)$, 其中 a 为实数.

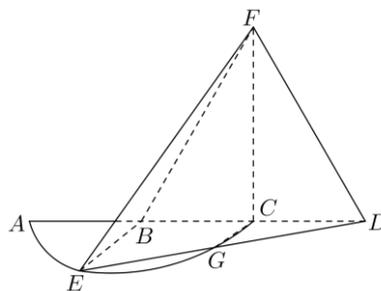
(1) 设集合 $A = \{x \mid y = f(x)\}$, 集合 $B = \{y \mid y = -2^x, x \leq 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若集合 $C = \{x \mid \lg(x-1) + \lg(3-x) = f(x)\}$ 中的元素有且仅有 2 个, 求实数 a 的取值范围.

18. 如图，弧 AEC 是半径为 r 的半圆， AC 为直径，点 E 为弧 AC 的中点，点 B 和点 C 为线段 AD 的三等分点，线段 ED 与弧 EC 交于点 G ，且 $\cos \angle CBG = \frac{4}{5}$ ，平面 AEC 外一点 F 满足 $FG \perp$ 平面 BED ， $FC = 2r$.

(1) 求异面直线 ED 与 FC 所成角的大小；

(2) 将 $\triangle FCG$ (及其内部) 绕 FC 所在直线旋转一周形成一几何体，求该几何体的体积.



19. 已知中心在原点，顶点 A_1 、 A_2 在 x 轴上，其渐近线方程是 $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ ，双曲线过点 $P(6,6)$.

(1) 求双曲线方程；

(2) 动直线 l 经过 $\triangle A_1PA_2$ 的重心 G ，与双曲线交于不同的两点 M 、 N ，问：是否存在直线 l ，使 G 平分线段 MN ，证明你的结论.

20. 已知集合 $D = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, 集合 $B = \{y \mid y = -x^2 + 2x + 2, y \in \mathbf{Z}^+\}$,

集合 $C = \{x \mid y = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}, x \in \mathbf{Z}\}$, 且集合 D 满足 $D \cap B \neq \emptyset$, $D \cap C = \emptyset$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 对集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($k \geq 2$), 其中 $a_i \in \mathbf{Z}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 定义由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a + b \in A\}$,

$T = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a - b \in A\}$, 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n , 若对任意的 $a \in A$, 总有 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P .

① 请检验集合 $B \cup C$ 与 $B \cup D$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T ;

② 试判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.

参考答案

一. 填空题

1. $\{\frac{1}{2}, -1, 2\}$ 2. $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 2 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1\}$ 3. $(-2, 2)$ 4. $[-1, 1]$
5. (2) (4) 6. $[0, 4)$ 7. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 8. $(0, \frac{5}{3}]$
9. (2) (4) 10. $[0, \frac{4}{3}]$ 11. (2) (3) 12. $3^{10} - 2^{10} - 1$

二. 选择题

13. C 14. A 15. B 16. A

三. 解答题

17. (1) $[0, +\infty)$; (2) $(\frac{3}{2}, \frac{13}{8})$
18. (1) 90° ; (2) $\frac{4}{15}\pi r^3$
19. (1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$; (2) 不存在
20. (1) -2 ; (2) ① $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $T = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$; ② $m = n$