建平中学高二期末数学试卷

2022.06

一. 填空题

1. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的一条渐近线方程为$y=\dfrac{1}{2}x$，则$a=$________

2. 已知集合$A=\{x\mid \lg x<1\}$，$B=\{y\mid y=2\cos x,x\in\mathbf{R}\}$，则$A\bigcup B=$________

3. 已知复数z为纯虚数，若$z\mathrm{i}=6+a\mathrm{i}$(其中$a\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位)，则$z=$________

4. 已知一个圆锥的母线长为 2，侧面展开图是半圆，则该圆锥的体积为________

5. 若$(a-x)^7$展开式中x^3的系数为-560，则实数a的值为________

6. 已知随机变量X服从二项分布$B(7,\dfrac{1}{3})$，则$P(X=3)=$________(结果表示为最简分数)

7. 甲、乙、丙三人进行投篮练习，他们投中的概率分别是$\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{1}{3}$，且三人投中与否相互之间没有影响，则他们三人中恰有两人投中的概率为________

8. 在极坐标系中，点$P(\sqrt{5},\arctan 2)$到直线$\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=1$的距离为________

9. 若$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，$\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{5}{13}$，则$\cos 2\alpha=$________

10. 若曲线$y=(2x-a)\cdot \mathrm{e}^x$有两条过坐标原点的切线，则实数$a$的取值范围为________

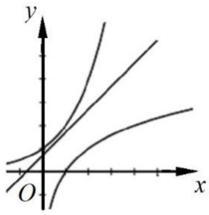
11. 设集合$A=\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\mid x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,3,\cdots,n\}$，其中$n\geq 3$，$n\in\mathbf{N}$，从集合$A$中任取一个元素$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，使不等式$2\leq |x_1|+|x_2|+|x_3|+\cdots+|x_n|\leq n-1$成立的概率为________(结果用含有$n$的式子表示)

12. 已知有穷数列$\{a_n\}$各项均不相等，将$\{a_n\}$的项从大到小重新排序后相应的项数构成新数列$\{b_n\}$，称数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$的“序数列”. 例如数列a_1、a_2、a_3满足$a_1>a_3>a_2$，则其序数列$\{b_n\}$为 1、3、2. 若有穷数列$\{d_n\}$满足$d_1=1$，$|d_{n+1}-d_n|=(\dfrac{1}{4})^n$($n$为正整数)，且数列$\{d_{2n-1}\}$的序数列单调递减，数列$\{d_{2n}\}$的序数列单调递增，则

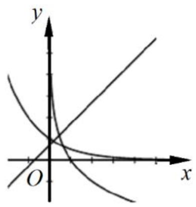
$d_1-d_2+d_3-d_4+\cdots+d_{2021}-d_{2022}=$________

二. 选择题

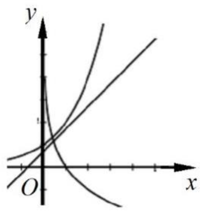
13. 已知$a>0$且$a\neq 1$，函数$y=\log_a x$、$y=a^x$、$y=x+a$在同一坐标系中的图像可能是（　　）



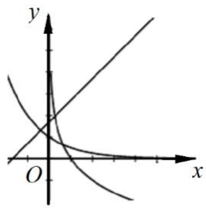
A.



B.



C.



D.

14. 已知两条直线 m、n，两个平面 α、β，给出下面四个命题，其中正确命题的序号是（　　）

① $m // n$，$m \perp \alpha \Rightarrow n \perp \alpha$　　② $\alpha // \beta$，$m \subset \alpha$，$n \subset \beta \Rightarrow m // n$

③ $\alpha // \beta$，$m // n$，$m \perp \alpha \Rightarrow n \perp \beta$　　④ $m // n$，$m // \alpha \Rightarrow n // \alpha$

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

15. 已知 A、B、C、D、E 是空间中的五个点，其中点 A、B、C 不共线，则“$DE //$ 平面 ABC”是“存在实数 x、y，使得 $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$”的（　　）条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

16. 定义点到曲线的距离为该点到这个曲线上任意点的距离的最小值. 已知曲线 C：$x^2 + 6y + y^2 = 0$，那么平面内到曲线 C 的距离与到坐标原点 O 的距离相等的点的轨迹是（　　）

A. 双曲线的一支　　B. 一个椭圆　　C. 一条线段　　D. 一条射线

三. 解答题

17. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为增数列，满足 $a_2 = 3$，前 3 项和 $S_3 = 13$.

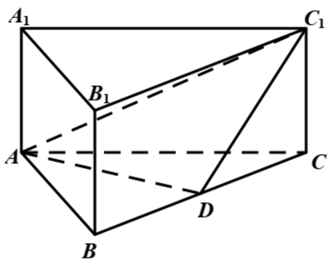
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n = \dfrac{1}{\log_3 a_{n+2} \cdot \log_3 a_{n+3}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

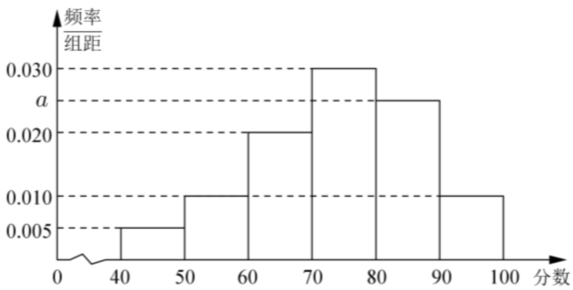
18. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=BC=2AA_1=4$，$\angle ABC=90^\circ$ ，D 是 BC 的中点.

（1）求点 A_1 到面 ADC_1 的距离；

（2）试问线段 A_1B_1 上是否存在点 E，使 AE 与 DC_1 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$？若存在，求 B_1E 的值；若不存在，说明理由.



19. 某市为了解 2022 届高三学生数学学习情况，该市教育局组织高三学生进行了摸底考试，现从参加考试的学生中随机抽取了 100 名，将他们的数学成绩(满分为 100 分)分为[40,50)、[50,60)、[60,70)、[70,80)、[80,90)、[90,100]共 6 组，得到如图所示的频率分布直方图.



（1）求 a 的值；

（2）记 A 表示事件“从参加考试的所有学生中随机抽取一名学生，该学生的数学成绩不低于 60 分”，试估计事件 A 发生的概率；

（3）在抽取的 100 名学生中，采用分层抽样的方法从成绩在[60,90)内的学生中抽取 15 名，再从这 15 名学生中随机抽取 4 名，记这 4 名学生成绩在[60,70)内的人数为 X，求 X 的分布、期望及方差.

20. 已知椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$，焦点为$F_1$、$F_2$，过$x$轴上的一点$M(m,0)$（$m\in\mathbf{R}$）作直线$l$交椭圆于$A$、$B$两点.

（1）若点M在椭圆内，

① 求多边形AF_1BF_2的周长；

② 求$|AM|$的最小值$f(m)$的表达式；

（2）是否存在与x轴不重合的直线l，使得$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|$成立？如果存在，求出$m$的取值范围；如果不存在，请说明理由.

21. 对于定义在D上的函数$f(x)$，其导函数为$f'(x)$，若存在$k\in D$，使得$f'(k)=f(k)$，且$x=k$是函数$f(x)$的极值点，则称函数$f(x)$为“k函数”.

（1）设函数$f(x)=x+a\tan x$，其中$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，$a\in\mathbf{R}$.

① 若函数$f(x)$是单调函数，求实数a的取值范围；

② 证明：函数$f(x)$不是“0函数”；

（2）对任意$m\in\mathbf{R}$，证明：函数$g(x)=x\sin x+m\cos x-m$是“0函数”.

参考答案

一. 填空题

1. 2　　2. $[-2,10)$　　3. $-6\mathrm{i}$　　4. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

5. ± 2　　6. $\frac{560}{2187}$　　7. $\frac{5}{36}$　　8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　9. $\frac{120}{169}$

10. $(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$　　11. $1-\frac{2^n+2n+1}{3^n}$　　12. $-\frac{4}{15}(1-\frac{1}{4^{2022}})$

二. 选择题

13. B　　14. A　　15. A　　16. D

三. 解答题

17.（1）3^{n-1}；（2）$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

18.（1）$\frac{4}{3}$；（2）存在，3；

19.

(1)

$\because (0.005+0.010+0.020+0.030+a+0.010)\times 10=1$,

$\therefore a=0.025$,

(2)

$\because$ 成绩不低于60分的频率为$(0.020+0.030+0.025+0.010)\times 10=0.85$,

$\therefore$ 事件A发生的概率约为0.85.

(3)

抽取的100名理科生中,

成绩在$[60,70)$内的有$100\times 0.020\times 10=20$人,

成绩在$[70,80)$内的有$100\times 0.030\times 10=30$人,

成绩在$[80,90)$内的有$100\times 0.025\times 10=25$人，故采用分层抽样抽取的15名理科生中,

成绩在$[60,70)$内的有4人，在$[70,80)$内的有6人，在$[80,90)$内的有5人,

由题可知，X的可能取值为0，1，2，3，4,

$P(X=0)=\frac{C_{11}^4}{C_{15}^4}=\frac{330}{1365}=\frac{22}{91}$，$P(X=1)=\frac{C_{11}^3C_4^1}{C_{15}^4}=\frac{660}{1365}=\frac{44}{91}$，

$P(X=2)=\frac{C_{11}^2C_4^2}{C_{15}^4}=\frac{330}{1365}=\frac{22}{91}$，$P(X=3)=\frac{C_{11}^1C_4^3}{C_{15}^4}=\frac{44}{1365}$，

$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{15}^4}=\frac{1}{1365}$

$\therefore X$的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{22}{91}$	$\frac{44}{91}$	$\frac{22}{91}$	$\frac{44}{1365}$	$\frac{1}{1365}$

$\therefore EX=0\times\frac{22}{91}+1\times\frac{44}{91}+2\times\frac{22}{91}+3\times\frac{44}{1365}+4\times\frac{1}{1365}=\frac{16}{15}$.

随机变量X服从二项分布$B\sim\left(4,\frac{4}{15}\right)$，所以$\therefore DX=4\times\frac{4}{15}\times\left(1-\frac{4}{15}\right)=\frac{176}{225}$

20.

(1)

①由椭圆Γ：$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$知，$a^2=100$、$b^2=25$，所以$a=10$、$b=5$、$c=5\sqrt{3}$，

根据椭圆的定义知，多边形AF_1BF_2的周长为：$l_{AF_1BF_2}=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=40$.

②设$A(x,y)$，则$|AM|=\sqrt{(x-m)^2+y^2}=\sqrt{(x-m)^2+25-\dfrac{x^2}{4}}$

$\sqrt{\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{4m}{3}\right)^2+25-\dfrac{m^2}{3}}$，其中$-10\le x\le 10$，$-10<m<10$，

令$f(m)=\sqrt{\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{4m}{3}\right)^2+25-\dfrac{m^2}{3}}$，

①当$-10\le\dfrac{4m}{3}\le 10$，即$-\dfrac{15}{2}\le m\le\dfrac{15}{2}$时，$|AM|_{\min}=f\left(\dfrac{4m}{3}\right)=\sqrt{25-\dfrac{m^2}{3}}$，

②当$\dfrac{4m}{3}>10$即$\dfrac{15}{2}<m<10$，$|AM|_{\min}=f(10)=10-m$，

③当$\dfrac{4m}{3}<-10$即$-10<m<-\dfrac{15}{2}$，$|AM|_{\min}=f(-10)=10+m$，

综上：$|AM|_{\min}=\begin{cases}\sqrt{25-\dfrac{m^2}{3}}, & -\dfrac{15}{2}\le m\le\dfrac{15}{2}\\ 10-m, & \dfrac{15}{2}<m<10\\ 10+m, & -10<m<-\dfrac{15}{2}\end{cases}$.

(2)

存在直线l，使得$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|$成立.理由如下：

当直线斜率存在时，设直线l的方程为$y=kx+m(k\ne 0)$，

由$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-100=0$.

$\Delta=(8km)^2-4(1+4k^2)(4m^2-100)>0$，化简得$25+100k^2>m^2$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-100}{1+4k^2}$.

若$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|$成立，

即$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|^2$，等价于$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

所以$x_1x_2+y_1y_2=0$.

$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，

$(1+k^2)\cdot\frac{4m^2-100}{1+4k^2}-km\cdot\frac{8km}{1+4k^2}+m^2=0$，

化简得$m^2=20+20k^2$.即$k^2=\frac{1}{20}m^2-1$，

代入$25+100k^2>m^2$中，$25+100\left(\frac{1}{20}m^2-1\right)>m^2$，

解得$m^2>\frac{75}{4}$．

又由$m^2=20+20k^2>20$，得$m^2>20$，

从而$m^2>20$，

解得$m>2\sqrt{5}$或$m<-2\sqrt{5}$．

当直线斜率不存在时，设直线l的方程为$x=m$，

则$A(m,\sqrt{25-\frac{m^2}{4}})$，，$B(m,-\sqrt{25-\frac{m^2}{4}})$，所以$x_1x_2+y_1y_2=0$有

$m^2-\left(25-\frac{m^2}{4}\right)=0$，解得：$m=\pm2\sqrt{5}$．

所以实数m的取值范围是$\left(-\infty,-2\sqrt{5}\right]\cup\left[2\sqrt{5},+\infty\right)$．

21.（1）① $a\geq0$或$a\leq-1$；② 略；（2）略