# 松江二中高三月考数学试卷

2022.09

## 一．填空题

1. 已知集合 $A=\{1,3,0\}$， $B=\{3,m^2\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 $m$ 的值为________

2. 已知复数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$，其中 i 是虚数单位，则 $|z|=$________

3. 已知 $a>0$， $b>0$，且 $a+2b=1$，则 $ab$ 的最大值为________

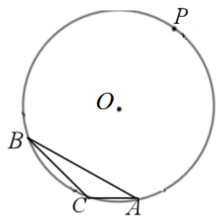
4. 二项式 $(x+\dfrac{1}{2x})^8$ 的展开式中的常数项是________

5. 设集合 $A=\{x\,|\,y=\lg(1-x)\}$，集合 $B=\{y\,|\,y=x^{\frac{1}{2}}\}$，则 $A\cap B=$________

6. 将函数 $y=f(x)$ 图象上的点保持纵坐标不变，横坐标伸长为原来的两倍后得到函数 $y=f_1(x)$ 的图象，再将 $y=f_1(x)$ 的图象向上平移 1 个单位后得到函数 $y=\sin x$ 的图象，则 $y=f(x)$ 的函数表达式是 $y=$________

7. 函数 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间为________

8. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$ 则关于 $t$ 的不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-1)<0$ 的解集为________




9. 如图， $P$ 为△ $ABC$ 外接圆 $O$ 上一个动点，若 $CA=1$， $CB=\sqrt{3}$， $\angle ACB=150^\circ$，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最大值为________

10. 若函数 $y=k|x|$ 与 $y=3^{|\log_3(x+1)|}$ 的图像有 3 个公共点，则实数 $k$ 的取值范围是________

11. 若对圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 上任意一点 $P(x,y)$， $|3x-4y+a|+|9-3x+4y|$ 的取值与 $x$ 、 $y$ 无关，则实数 $a$ 的取值范围是________

12. 已知集合 $A=\{x\,|\,x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$， $B=\{x\,|\,x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$．将 $A\cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$．记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，则使得 $S_n>12a_{n+1}$ 成立的 $n$ 的最小值为________

## 二．选择题

13. “ $x=1$ 且 $y=2$ ”是“ $x+y=3$ ”的（　　）条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

14. 已知 $x>y>z$ 且 $x+y+z=0$，则下列不等式恒成立的是（　　）

A. $xy>yz$　　B. $xz>yz$　　C. $xy>xz$　　D. $x|y|>z|y|$

15. 已知$\alpha$、$\beta$是不同的平面，$m$、$n$是不同的直线，则下列命题不正确的是（　　）

A. 若$m\perp\alpha$，$m//n$，$n\subset\beta$，则$\alpha\perp\beta$　　B. 若$m\perp\alpha$，$m//n$，则$n\perp\alpha$

C. 若$m//\alpha$，$m//n$，则$n//\alpha$　　D. 若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha//\beta$

16. 已知复数$z_1$、$z_2$满足$|z_1+1|+|z_1-1|=2\sqrt{2}$，$|z_2-2i|=2$，(其中 i 是虚数单位)，则$\left|z_1-z_2\right|$的最大值为（　　）

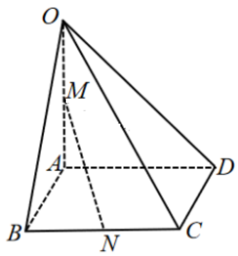
A. 3　　B. 5　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}+2$

**三. 解答题**

17. 如图，在四棱锥$O-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 1 的菱形，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$OA\perp$底面$ABCD$，$OA=2$，$M$为$OA$的中点，$N$为$BC$的中点.

（1）证明：直线$MN//$平面$OCD$；

（2）求点$B$到平面$OCD$的距离.




18. 已知$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$在点$P(1,2)$处的切线斜率为 4，且在$x=-1$处取得极值.

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若函数$g(x)=f(x)+m-1$有三个零点，求$m$的取值范围.

19. 新冠肺炎疫情发生以后，口罩供不应求，某口罩厂日夜加班生产，为抗击疫情做贡献. 生产口罩的固定成本为400万元，每生产$x$万箱，需另投入成本$p(x)$万元，当产量不足60万箱时，$p(x)=\frac{1}{2}x^2+50x$；当产量不小于60万箱时，$p(x)=101x+\frac{6400}{x}-1860$，若每箱口罩售价100元，通过市场分析，该口罩厂生产的口罩可以全部销售完.

（1）求口罩销售利润$y$（万元）关于产量$x$（万箱）的函数关系式；

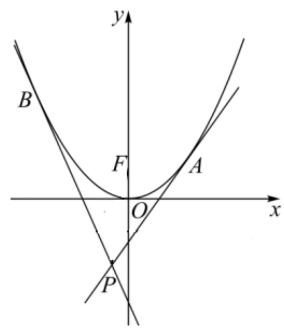
（2）当产量为多少万箱时，该口罩生产厂在生产中所获得利润最大？

20. 如图，已知$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$为抛物线$\Gamma:y=\frac{1}{4}x^2$的图像上异于顶点的任意两个点，抛物线$\Gamma$在点$A$、$B$处的切线相交于$P(x_0,y_0)$.

（1）写出这条抛物线的焦点坐标和准线方程；

（2）求证：$x_1$、$x_0$、$x_2$成等差数列，$y_1$、$y_0$、$y_2$成等比数列；

（3）若$A$、$F$、$B$三点共线，求出动点$P$的轨迹方程及△$PAB$面积的最小值.



21. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$|a_{n+1}-a_n|=p^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）若$p=1$，写出$a_4$所有可能的值；

（2）若数列$\{a_n\}$是严格递增数列，且$a_1$、$2a_2$、$3a_3$成等差数列，求$p$的值；

（3）若$p=2$，且$\{a_{2n-1}\}$是严格递增数列，$\{a_{2n}\}$是严格递减数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

# 松江二中 2022 学年第一学期 9 月学情调研

## 高三　　数学

【考试时间 120 分钟　满分 150 分】

2022.9

考生注意：

1．本考试设试卷和答题纸两部分，试卷包括试题与答题要求，所有答题必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，做在试卷上一律不得分.

2．答题前，务必在答题纸填写姓名和考号.

3．答题纸与试卷在试题编号上是一一对应的，答题时应特别注意，不能错位.

4．本试卷共有21道试题，满分150分．考试时间120分钟.

**一、填空题（1-6 每题 4 分，7-12 每题 5 分，满分 54 分）**

1．已知集合 $A=\{1,3,0\},B=\{3,m^2\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 $m$ 的值为__________.

【详解】因为 $B\subseteq A$，所以 $m^2=1$ 或 $m^2=0$，所以 $m=0,1,-1$，经检验均符合要求，故答案为：0，1，-1.

2．已知复数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$，其中 $\mathrm{i}$ 是虚数单位，则 $|z|=$________.

【详解】由题意得，$|z|=\left|\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{1}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3．已知 $a>0,b>0$ 且 $a+2b=1$，则 $ab$ 的最大值为______.

【详解】答案为：$\dfrac{1}{8}$.

4．二项式 $(x+\dfrac{1}{2x})^8$ 的展开式中的常数项是_________.

【详解】利用二项展开式的通项公式得常数项为 $C_8^4\cdot(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{35}{8}$，故答案为：$\dfrac{35}{8}$.

5．设集合 $A=\{x\,|\,y=\lg(1-x)\}$，集合 $B=\left\{y\left|y=x^{\frac{1}{2}}\right.\right\}$，则 $A\cap B=$_________.

【详解】因为集合 $A=(-\infty,1),B=[0,+\infty)$，所以 $A\cap B=[0,1)$，故答案为：$[0,1)$.

6．将函数 $y=f(x)$ 图象上的点保持纵坐标不变，横坐标伸长为原来的两倍后得到函数 $y=f_1(x)$ 的图象，再将 $y=f_1(x)$ 的图象向上平移 1 个单位后得到函数 $y=\sin x$ 的图象，则 $y=f(x)$ 的函数表达式是 $y=$______.

【详解】由题意可知 $f_1(x)=f(\frac{x}{2})$，$\sin x=f_1(x)+1$，即 $f(\frac{x}{2})=\sin x-1$，所以 $f(x)=\sin 2x-1$，故答案为：$\sin 2x-1$。

7．函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$在$[0,\pi]$上的单调递减区间为______.

【详解】令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{11\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，令$k=0$得$\frac{5\pi}{12}\le x\le\frac{11\pi}{12}$，所以函数 $f(x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间为$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$，故答案为：$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$.

8．已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$ 则关于 $t$ 的不等式 $f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-1\right)<0$ 的解集为______.【详解】函数 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$ 的定义域为 **R.**因为

$f(-x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}+1}=-\frac{1}{2}+\frac{2^x}{2^x+1}$，

所以 $f(-x)+f(x)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}+1}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}\right)=-1+1=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)$ 是奇函数.

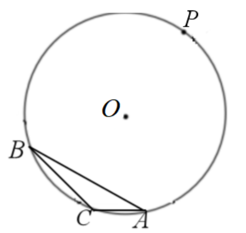
因为 $y=2^x$ 为增函数，所以 $y=\frac{1}{2^x+1}$ 为减函数，所以 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$ 在 **R** 上为减函数.

所以 $f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-1\right)<0$ 可化为 $f\left(t^2-2t\right)<-f\left(2t^2-1\right)=f\left(1-2t^2\right)$.

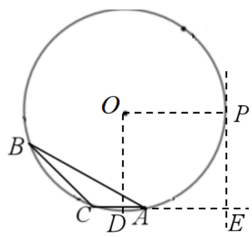
所以$t^2-2t>1-2t^2$，解得：$t>1$或$t<-\frac{1}{3}$.故答案为：$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

【另解】直接代入计算得 $2^{3t^2-2t-1}>1$，解得$t\in(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$.

9．如图，$P$ 为$\Delta ABC$外接圆$O$上一个动点，若$CA=1,CB=\sqrt{3},\angle ACB=150^\circ$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$的最大值__________.




【详解】由余弦定理得$|AB|=\sqrt{CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos 150^\circ}=\sqrt{7}$，由正弦定理得外接圆半径 $R=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{\sin 150^\circ}=\sqrt{7}$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{CA}|d=d$，其中$d$是$\overrightarrow{CP}$在$\overrightarrow{CA}$上的投影，过点$O$作$OP//CA$交圆于点$P$，如图所示，

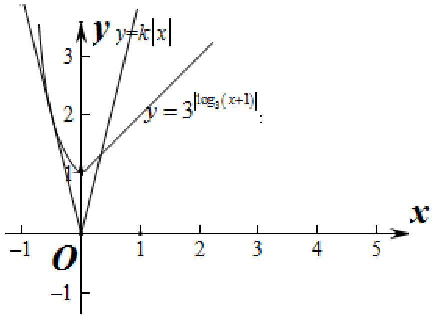



则 $d_{\max}=\frac{1}{2}|CA|+R=\frac{1}{2}+\sqrt{7}$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$的最大值为$\frac{1}{2}+\sqrt{7}$，故答案为：$\sqrt{7}+\frac{1}{2}$.

解法 2：$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}+\sqrt{7}\cos<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OP}>\le\frac{1}{2}+\sqrt{7}$.

解法 3：建系，$C(0,0),A(1,0),B(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),P(\frac{1}{2}+\sqrt{7}\cos\theta,\frac{3}{2}\sqrt{3}+\sqrt{7}\sin\theta)$

10．若函数 $y=k|x|$ 与 $y=3^{|\log_3(x+1)|}$ 的图像有 3 个公共点，则实数 $k$ 的取值范围是__________




【详解】由 $y=3^{|\log_3(x+1)|}$ 得 $y=\begin{cases}\frac{1}{x+1},-1<x<0\\ x+1,x\geqslant 0\end{cases}$，由 $y=k|x|$ 得 $y=\begin{cases}-kx,x<0\\ kx,x\geqslant 0\end{cases}$，作出两函数的图象如下图：当 $x\geqslant 0$ 时，$k>1$，在 $[0,+\infty)$ 上有一个交点，而函数 $y=k|x|$ 与 $y=3^{|\log_3(x+1)|}$ 的图象恰有两个公共点，所以当 $x<0$ 时两函数图象有且只有一个交点，即 $y=-kx$ 与 $y=\frac{1}{x+1}$ 相切，即 $-kx=\frac{1}{x+1}(x<0)$，即 $kx^2+kx+1=0$，　$\Delta=k^2-4k=0$，解得 $k=4$ 或 0（舍去），于是当 $k>4$ 时有 3 个公共点，

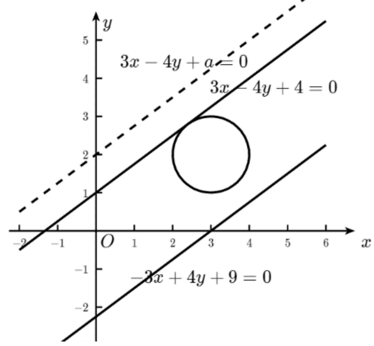
故答案为：$(4,+\infty)$.

11．若对圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 上任意一点 $P(x,y)$，$|3x-4y+a|+|9-3x+4y|$ 的取值与 $x$、$y$ 无关，则实数 $a$ 的取值范围是________.

【详解】设 $z=|3x-4y+a|+|9-3x+4y|=5\left[\frac{|3x-4y+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}+\frac{|-3x+4y+9|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}\right]$，故

$|3x-4y+a|+|9-3x+4y|$ 可以看作点 $P$ 到直线 $m$：$3x-4y+a=0$ 与直线 $l$：$-3x+4y+9=0$ 距离之和的 5 倍，

$\because |3x-4y+a|+|9-3x+4y|$ 的取值与 $x$、$y$ 无关，$\therefore$ 这个距离之和与点 $P$ 在圆上的位置无关，




如图所示，可知直线 $m$ 平移时，$P$ 点与直线 $m$、$l$ 的距离之和均为 $m$、$l$ 的距离，即此时圆在两直线的中间，当直线 $m$ 与圆相切时，

$\frac{|3\times 3-4\times 2+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|a+1|}{5}=1$，解得：$a=4$ 或 $a=-6$（舍去）$\therefore a\geq 4$ $\therefore$ 实数 $a$ 的取值范围是 $[4,+\infty)$，故答案为：$[4,+\infty)$.

12．已知集合 $A=\{x\,|\,x=2n-1,n\in N,n\geq 1\}$，$B=\{x\,|\,x=2^n,n\in N,n\geq 1\}$．将 $A\cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$．记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，则使得 $S_n>12a_{n+1}$ 成立的 $n$ 的最小值为________.

【详解】设 $a_n=2^k$，则 $S_n=[(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+(2\times 3-1)+\cdots+(2\cdot 2^{k-1}-1)]+[2+2^2+\cdots+2^k]$

$$=\frac{2^{k-1}\left(1+2\times 2^{k-1}-1\right)}{2}+\frac{2(1-2^{k})}{1-2}=2^{2k-2}+2^{k+1}-2$$

由 $S_n>12a_{n+1}$ 得 $2^{2k-2}+2^{k+1}-2>12(2^k+1),(2^{k-1})^2-20(2^{k-1})-14>0,2^{k-1}\geq 2^5,k\geq 6$

所以只需研究 $2^5<a_n<2^6$ 是否有满足条件的解，此时

$S_n=[(2\times1-1)+(2\times2-1)+(2\times3-1)+\cdots+(2m-1)]+[2+2^2+\cdots+2^5]=m^2+2^{5+1}-2$，

$a_{n+1}=2m+1$， $m$ 为等差数列项数，且 $m>16$．由 $m^2+2^{5+1}-2>12(2m+1),m^2-24m+50>0$，

$\therefore m\geq 22,n=m+5\geq 27$，于是满足条件的 $n$ 最小值为 $27$．

**二、选择题（每题 5 分，满分 20 分）**

13．“$x=1$ 且 $y=2$”是“$x+y=3$”（　　　）条件

A．充分非必要　　B．必要非充分　　C．充要　　D．既非充分又非必要

【详解】选：A.

14．已知 $x>y>z$ 且 $x+y+z=0$，则下列不等式恒成立的是（　　　）

A．$xy>yz$　　B．$xz>yz$　　C．$xy>xz$　　D．$x|y|>z|y|$

【详解】因为 $x>y>z$ 且 $x+y+z=0$，所以 $3x>x+y+z=0$，即 $x>0$.

又因为 $3z<x+y+z=0$，即 $z<0$.所以 $x>0$， $z<0$， $y$ 无法判断.

对选项 A，当 $y=0$ 时， $xy=yz$，故 A 错误；

对选项 B，因为 $x>y$， $z<0$，所以 $xz<yz$，故 B 错误；

对选项 C，因为 $y>z$， $x>0$，所以 $xy>xz$，故 C 正确；

对选项 D，当 $y=0$ 时， $x|y|=z|y|$，故 D 错误.　故选：C

15．已知 $\alpha$、$\beta$ 是不同的平面， $m$、$n$ 是不同的直线，则下列命题不正确的是（　　　）

A．若 $m\perp\alpha$， $m//n$， $n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　B．若 $m\perp\alpha,m//n$，则 $n\perp\alpha$

C．若 $m//\alpha$， $m//n$，则 $n//\alpha$　　D．若 $m\perp\alpha$， $m\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$

【详解】A 项：因为 $m\perp\alpha$， $m//n$，所以 $n\perp\alpha$，因为 $n\subset\beta$，所以 $\alpha\perp\beta$，A 正确；

B 项：由 $m\perp\alpha,m//n$，根据线面垂直的性质能推出 $n\perp\alpha$，B 正确；

C 项： $n$ 有可能在平面 $\alpha$ 内，C 错误；

D 项：由垂直于同一条直线的两个平面互相平行知，D 正确，故选：C

16．已知复数 $z_1,z_2$ 满足 $|z_1+1|+|z_1-1|=2\sqrt{2},|z_2-2i|=2$，（其中 $i$ 是虚数单位），则 $|z_1-z_2|$ 的最大值为（　　）

A．3　　B．5　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{2}+2$

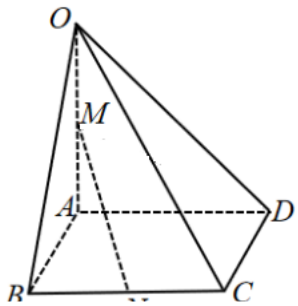
【详解】复数 $z_1$ 在复平面的对应点的轨迹为焦点分别在 $(-1,0)$，$(1,0)$ 的椭圆，方程为

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；复数 $z_2$ 在复平面的对应点的轨迹为圆心在 $(0,2)$，半径为 2 的圆，方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，结合图形知 $|z_1-z_2|_{\max}=|z_1-2i|_{\max}+2=5$，此时 $z_1=-i, z_2=2i$，故选 B.

另解：设 $z_1=\sqrt{2}\cos\alpha+i\sin\alpha, z_2=2\cos\beta+i(2+2\sin\beta), \alpha,\beta\in R$，则 $|z_1-z_2|\le|t+2|$，其中 $t=\sqrt{-\sin^2\alpha-4\sin\alpha+6}\in[1,3]$，于是 $|z_1-z_2|\le|t+2|\le 5$.

**三、解答题（满分 76 分）**

**17.（满分 14 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分）**

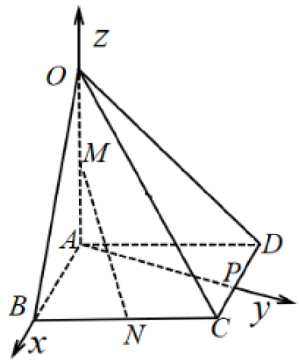



如图，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$OA\perp$ 底面 $ABCD$，　$OA=2$，$M$ 为 $OA$ 的中点，$N$ 为 $BC$ 的中点.

（1）证明：直线 $MN$//面 $OCD$；

（2）求点 $B$ 到平面 $OCD$ 的距离.

【解 1】过 $A$ 作 $AP\perp CD$ 交 $CD$ 于点 $P$.如图示，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AO}$ 为 $x$、$y$、$z$ 轴正方向建立坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$P\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，




$O(0,0,2)$，$M(0,0,1)$，$N\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)$.

（1）$\overrightarrow{MN}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-1\right)$，$\overrightarrow{OP}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$.

设平面 $OCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OD}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0\end{cases}$.

不妨取 $z=\sqrt{2}$，解得：$\vec{n}=(0,4,\sqrt{2})$.…………………………………………… 4 分

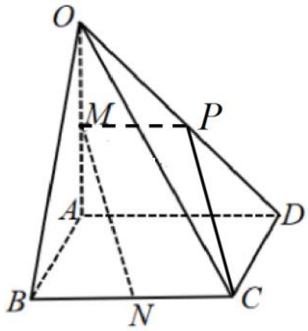
因为 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-1\right)\cdot(0,4,\sqrt{2})=0+\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$，

直线 $MN\not\subset$ 面 $OCD$，所以 $MN$//面 $OCD$.…………………………………………… 6 分

（2）设点 $B$ 到平面 $OCD$ 的距离为 $d$，则 $d$ 为 $\overrightarrow{OB}$ 在向量 $\vec{n}=(0,4,\sqrt{2})$ 上的投影的绝对值，……… 8 分

由 $\overrightarrow{OB}=(1,0,-2)$，　得 $d=\frac{|\overrightarrow{OB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|0+0-2\sqrt{2}|}{\sqrt{0+4^2+2}}=\frac{2}{3}$.…………………… 12 分

所以点 $B$ 到平面 $OCD$ 的距离为 $\frac{2}{3}$.………………………… 14 分




【解 2】(1)如图所示，取 OD 中点 P，连接 MP、PC，则 $MP\underset{=}{//}\frac{1}{2}AD\underset{=}{//}NC$，

……………………………………………………………… 2 分

故四边形 MNCP 是平行四边形，则 MN//PC，……………………… 4 分

而 $PC\subset$ 平面 $OCD$，于是直线 $MN//$面 $OCD$.…………………… 6 分

(2) 利用等体积法有 $V_{O-BCD}=V_{B-OCD}$，设点 $B$ 到平面 $OCD$ 的距离为 $d$，

则 $\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\cdot OA=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta OCD}\cdot d$，即 $d=\frac{S_{\Delta BCD}\cdot OA}{S_{\Delta OCD}}$.………………… 8 分

由于 $AC=\sqrt{1+1-2\times1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$，$OC=\sqrt{6-\sqrt{2}}$，$OD=\sqrt{5},CD=1$，

$\cos\angle ODC=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$，……………… 12 分

于是 $d=\frac{S_{\Delta BCD}\cdot OA}{S_{\Delta OCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\cdot2}{\frac{3}{4}\sqrt{2}}=\frac{2}{3}$.………………………… 14 分

**18.（满分 14 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分）**

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线斜率为 4，且在 $x=-1$ 处取得极值.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $g(x)=f(x)+m-1$ 有三个零点，求 $m$ 的取值范围.

【解】(1) 由题意，函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，可得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线斜率为 4，且在 $x=-1$ 处取得极值，

可得 $\begin{cases}f(1)=2\\f'(1)=4\\f'(-1)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}1+a+b+c=2\\3+2a+b=4\\3-2a+b=0\end{cases}$，解得 $a=1,b=-1,c=1$，所以

$f(x)=x^3+x^2-x+1$，………… 3 分

可得 $f'(x)=3x^2+2x-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{3}$.

当 $x$ 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ | $\frac{1}{3}$ | $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |

| $f\left(x\right)$ | □ | 2 | □ | $\dfrac{22}{27}$ | □ |
|---|---|---|---|---|---|

所以函数 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$；单调递增区间是 $\left(-\infty,-1\right)$，$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$．…… 6 分

（2）依题意方程 $f\left(x\right)+m-1=0$ 有 3 个不同实数根，……………………… 8 分

即 $f\left(x\right)=1-m$，函数 $y=f\left(x\right)$ 与函数 $y=1-m$ 的图像有 3 个不同的交点，……… 10 分

结合（1）知 $f(\dfrac{1}{3})<1-m<f(-1)$，……………………………… 12 分

解得 $-1<m<\dfrac{5}{27}$．……………………………… 14 分

**19.（满分 14 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分）**

新冠肺炎疫情发生以后，口罩供不应求，某口罩厂日夜加班生产，为抗击疫情做贡献．生产口罩的固定成本为 400 万元，每生产 $x$ 万箱，需另投入成本 $p\left(x\right)$ 万元，当产量不足 60 万箱时，$p\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2+50x$；当产量不小于 60 万箱时，$p\left(x\right)=101x+\dfrac{6400}{x}-1860$，若每箱口罩售价 100 元，通过市场分析，该口罩厂生产的口罩可以全部销售完．

（1）求口罩销售利润 $y$（万元）关于产量 $x$（万箱）的函数关系式；

（2）当产量为多少万箱时，该口罩生产厂在生产中所获得利润最大？

【解】（1）当 $0<x<60$ 时，

$y=100x-\left(\dfrac{1}{2}x^2+50x\right)-400=-\dfrac{1}{2}x^2+50x-400$；……………………… 2 分

当 $x\ge 60$ 时，$y=100x-\left(101x+\dfrac{6400}{x}-1860\right)-400=1460-\left(x+\dfrac{6400}{x}\right)$．……………… 4 分

所以，$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+50x-400, 0<x<60\\ 1460-\left(x+\dfrac{6400}{x}\right), x\ge 60\end{cases}$；……………………… 6 分

（2）当 $0<x<60$ 时，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+50x-400=-\dfrac{1}{2}(x-50)^2+850$，

当 $x=50$ 时，$y$ 取得最大值，最大值为 850 万元；……………………………… 8 分

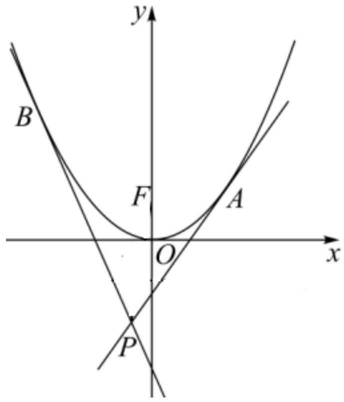
当 $x\ge 60$ 时，$y=1460-\left(x+\dfrac{6400}{x}\right)\le 1460-2\sqrt{x\cdot\dfrac{6400}{x}}=1300$，…………… 10 分

当且仅当 $x=\dfrac{6400}{x}$ 时，即 $x=80$ 时，$y$ 取得最大值，最大值为 1300 万元．……… 12 分

综上，当产量为 80 万箱时，该口罩生产厂在生产中获得利润最大，最大利润为 1300 万元．……… 14 分

**20.（满分 16 分，第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 6 分）**

如图，已知 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 为抛物线 $\Gamma$：$y=\frac{1}{4}x^2$ 的图像上异于顶点的任意两个点，抛物线 $\Gamma$ 在点 $A$、$B$ 处的切线相交于 $P(x_0,y_0)$.




(1)写出这条抛物线的焦点坐标和准线方程；

(2)求证：$x_1$、$x_0$、$x_2$ 成等差数列，$y_1$、$y_0$、$y_2$ 成等比数列；

(3)若 $A,F,B$ 三点共线，求出动点 $P$ 的轨迹方程及 $\Delta PAB$ 面积的最小值.

【解】(1)抛物线的标准方程为 $x^2=4y$，于是焦点坐标为 $F(0,1)$，准线方程为 $y=-1$.………… 4 分

（2）函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的导函数为 $y'=\frac{1}{2}x$，于是 $l_{AP}:y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$，

$l_{BP}:y=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)+\frac{1}{4}x_2^2=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$　　……………………… 6 分

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2 \\ y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2 \end{cases}$ 解得 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{x_1x_2}{4}$，而 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2, y_2=\frac{1}{4}x_2^2$，于是

$y_0^2=\frac{x_1^2x_2^2}{16}=y_1y_2$，即 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0^2=y_1y_2$，故 $x_1$、$x_0$、$x_2$ 成等差数列，$y_1$、$y_0$、$y_2$ 成等比数列.………… 10 分

（3）由于 $A,F,B$ 三点共线，设 $l_{AB}:y=kx+1$

联立 $\begin{cases} y=kx+1 \\ y=\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2-4kx-4=0$，于是 $x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4$，结合（2）得 $\begin{cases} x_0=2k \\ y_0=-1 \end{cases}$，

即动点 $P$ 的轨迹方程为 $y=-1$.……………… 12 分

$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(1+k^2)(16k^2+16)}\cdot\frac{|2k^2+2|}{\sqrt{1+k^2}}=4(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\ge 4$，即 $\Delta PAB$ 面积的最小值为 4.………………………… 16 分

**21.（满分 18 分，第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 8 分）**

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$|a_{n+1}-a_n|=p^n$，$n\in N, n\ge 1$.

（1）若 $p=1$，写出 $a_4$ 所有可能的值；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 是严格递增数列，且 $a_1$，$2a_2$，$3a_3$ 成等差数列，求 $p$ 的值；

（3）若 $p=2$，且 $\{a_{2n-1}\}$ 是严格递增数列，$\{a_{2n}\}$ 是严格递减数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解】（1）$a_4$有可能的值为$-2,0,2,4$；……………………………… 4 分

（2）因为数列$\{a_n\}$是递增数列，所以$a_{n+1}-a_n=|a_{n+1}-a_n|=p^n$.……… 6 分

而$a_1=1$，所以$a_2=p+1, a_3=p^2+p+1$，又$a_1,2a_2,3a_3$成等差数列，所以$4a_2=a_1+3a_3$，

所以$3p^2-p=0$.解得$p=\dfrac{1}{3}$或$p=0$，当$p=0$时，$a_{n+1}=a_n$，这与$\{a_n\}$是严格递增数列矛盾，

所以$p=\dfrac{1}{3}$.…………………………… 10 分

（3）因为$\{a_{2n-1}\}$是递增数列，所以$a_{2n+1}-a_{2n-1}>0$，所以$(a_{2n+1}-a_{2n})+(a_{2n}-a_{2n-1})>0$， ①

但$|a_{2n+1}-a_{2n}|=2^{2n}, |a_{2n}-a_{2n-1}|=2^{2n-1}, 2^{2n}>2^{2n-1}$，所以$|a_{2n+1}-a_{2n}|>|a_{2n}-a_{2n-1}|$ ，②

由①，②知，$a_{2n+1}-a_{2n}>0$，所以$a_{2n+1}-a_{2n}=2^{2n}$，③

因为$\{a_{2n}\}$是递减数列，同理可得$a_{2n+2}-a_{2n+1}<0$，所以$a_{2n+2}-a_{2n+1}=-2^{2n+1}$ ，④

联立③，④得$\begin{cases} a_{2n+1}-a_{2n}=2^{2n} \\ a_{2n+2}-a_{2n+1}=-2^{2n+1} \end{cases}(n\ge 1)$，相加可得$a_{2n+2}-a_{2n}=-2^{2n}$，$n\ge 1$…… 13 分

累加得

$$a_{2n}=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-2})=a_2+(-2^2-2^4-\cdots-2^{2n-2})=a_2+\frac{4}{3}-\frac{2^{2n}}{3}$$

于是由③得$a_{2n+1}=a_{2n}+2^{2n}=a_2+\dfrac{4}{3}+\dfrac{2^{2n+1}}{3}$，$n\ge 1$.

即$a_n=\begin{cases} a_2+\dfrac{4}{3}+\dfrac{2^n}{3}, & n\text{为奇数}, n\ge 3 \\ a_2+\dfrac{4}{3}-\dfrac{2^n}{3}, & n\text{为偶数}, n\ge 2 \end{cases}=a_2+\dfrac{4}{3}-\dfrac{(-2)^n}{3}$，$n\in N, n\ge 2$

所以$a_n=\begin{cases} 1, & n=1 \\ a_2+\dfrac{4}{3}-\dfrac{(-2)^n}{3}, & n\ge 2 \end{cases}(n\in N)$……………………… 16 分

由$a_1=1$, $|a_2-a_1|=2$得$a_2=3$或$-1$，

于是当$a_2=3$时，$a_n=\begin{cases} 1, & n=1 \\ \dfrac{13-(-2)^n}{3}, & n\ge 2 \end{cases}$；当$a_2=-1$时，$a_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$,其中

$n\in N, n\ge 1$.……… 18 分