格致中学高三开学考数学试卷

2022.09

一. 填空题

1. 已知集合 $A=\{1,4,5\}$， $B=\{3,4\}$，则 $A\cup B=$________

2. 复数 $3+4\mathrm{i}$ 的平方根是________

3. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，则 $|\vec{b}|=$________

4. 已知 F_1 、 F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，P 在双曲线上，且满足 $\angle F_1PF_2=90°$ ，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为________

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_4=0$， $a_5=10$，则 $a_n+S_n=$________

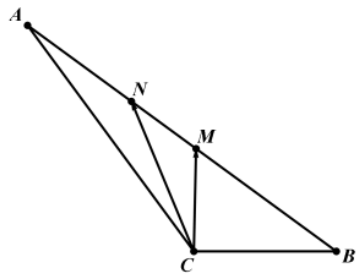
6. 若 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\dfrac{5\pi}{6})=$________

7. 直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=\sqrt{x}+1$ 的切线，则 $a+b$ 的最小值为________

8. 各项均为正数且公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项、第 2 项、第 6 项恰好是等比数列 $\{b_n\}$ 的连续三项（顺序不变），设 $S_n=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n<\dfrac{1}{a_1}$ 恒成立，则 a_1 的最小值为________

9. 设函数 $f(x)=1+|x|-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使得不等式 $f(\log_2 x)>f(-2\log_{\frac{1}{2}}x-1)$ 成立的实数 x 的取值范围是________

10. 如图，$\triangle ABC$ 中， $AC=4$， $BC=2$，$\angle ACB$ 为钝角，M、N 是边 AB 上的两个动点，且 $MN=1$，若 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}$，则 $\cos\angle ACB=$________



11. 三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E 为 PC 的中点，若直线 AE 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，则 PA 的长为________

12. 设 a、b 是两个实数，且满足 $0\le a<b$，直线 $l:y=kx+m$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 交于两点 A、B，若对于任意的 $k\in[a,b]$，均存在正数 m，使得 $\triangle OAB$ 的面积均不小于 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，则 $b-2a$ 的最大值为________

二. 选择题

13. 已知 x、y 都是实数，命题 $p:|x|<3$，命题 $q:x^2-2x-3<0$，则 p 是 q 的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

14. 下列说法正确的是（　　）

A. 如果直线 l 不平行于平面 α，那么平面 α 不存在与 l 平行的直线

B. 如果直线 l // 平面 α，平面 α // 平面 β，那么直线 l // 平面 β

C. 如果直线 l 与平面 α 相交，平面 α // 平面 β，那么直线 l 与平面 β 也相交

D. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 γ，平面 $\beta\perp$ 平面 γ，那么平面 α // 平面 β

15. 设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，若存在两个不等实数 x_1、x_2，使得

$f(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P，那么下列函数：

① $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；② $f(x)=x^2$；③ $f(x)=|x^2-1|$.

具有性质 P 的函数的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

16. 某单位为了解该单位党员开展学习党史知识活动情况，随机抽取了部分党员，对他们一周的党史学习时间进行了统计，统计数据如下表所示：

党史学习时间（小时）	7	8	9	10	11
党员人数	6	10	9	8	7

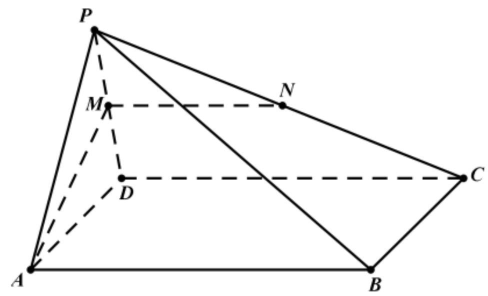
则该单位党员一周学习党史时间的众数及第 40 百分位数分别是（　　）

A. 8，8.5　　B. 8，8　　C. 9，8　　D. 8，9

三. 解答题

17. 如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AP=AD$，M、N 分别为棱 PD、PC 的中点，求证：

（1）MN // 平面 PAB；（2）$AM\perp$ 平面 PCD.



18. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n=3n^2+5n$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=8$，$b_n=64b_{n+1}$.

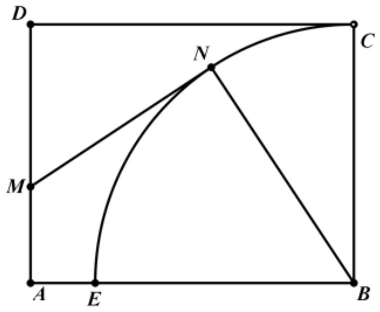
（1）证明$\{a_n\}$是等差数列；

（2）是否存在常数 a、b，使得对一切正整数 n 都有 $a_n=\log_a b_n+b$ 成立. 若存在，求出 a、b 的值；若不存在，说明理由.

19. 如图，某城市小区有一个矩形休闲广场，$AB=20$ 米，广场的一角是半径为 16 米的扇形 BCE 绿化区域，为了使小区居民能够更好的在广场休闲放松，现决定在广场上安置两排休闲椅，其中一排是穿越广场的双人靠背直排椅 MN（宽度不计），点 M 在线段 AD 上，并且与曲线 CE 相切；另一排为单人弧形椅沿曲线 CN（宽度不计）摆放. 已知双人靠背直排椅的造价每米为 $2a$ 元，单人弧形椅的造价每米为 a 元，记锐角$\angle NBE=\theta$，总造价为 W 元.

（1）试将 W 表示为θ的函数$W(\theta)$，并写出$\cos\theta$的取值范围；

（2）问当 AM 的长为多少时，能使总造价 W 最小.



20. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过$A(1,0)$、$B(0,b)$两点，$O$为坐标原点，且$\triangle AOB$的面积为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. 过点$P(0,1)$且斜率为$k$（$k>0$）的直线$l$与椭圆$C$有两个不同的交点$M$、$N$，且直线$AM$、$AN$分别与$y$轴交于点$S$、$T$.

（1）求椭圆C的方程;

（2）求直线l的斜率的取值范围;

（3）设$\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，求$\lambda+\mu$的取值范围.

21. 已知函数$f(x)=(2-a)\ln x+\dfrac{1}{x}+2ax$（$a\le 0$）.

（1）当$a=0$时，求$f(x)$的极值;

（2）当$a<0$时，讨论$f(x)$的单调性;

（3）若对任意的$a\in(-3,-2)$，x_1、$x_2\in[1,3]$，恒有$(m+\ln 3)a-2\ln 3>|f(x_1)-f(x_2)|$成立，求实数$m$的取值范围.

参考答案

2022学年度第一学期高三数学周练习卷（1）参考答案

一、填空题：（**1-6**每小题**4**分，**7-12**每小题**5**分，满分**54**分）

1、	$\{1,3,4,5\}$	2、	$2+i$ 和 $-2-i$	3、	4
4、	1	5、	$2n^2-4n-10$	6、	$\frac{7}{9}$

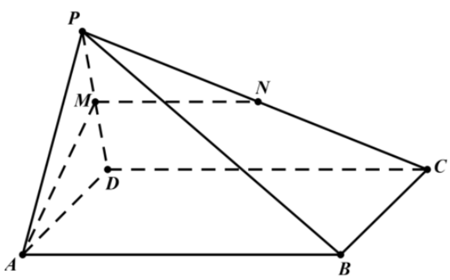
7、	2	8、	$\frac{1}{3}$	9、	$\left(\sqrt[3]{2},2\right)$
10	$\frac{1-3\sqrt{5}}{8}$	11	$\sqrt{3}$ 或 2	12	$\sqrt{2}$

二、选择题：（每小题**5**分，满分**20**分）

13、	B	14、	C	15、	C	16、	A

三、解答题：

17、本题满分12分，第（1）题6分，第（2）题6分.



解：(1)因为M、N分别为棱PD、PC的中点，

所以$MN /\!/ DC$.

又因为底面$ABCD$是矩形，所以$AB /\!/ DC$.

于是$MN /\!/ AB$.

又$AB\subset$平面PAB，MN不在平面PAB上，

所以$MN /\!/$平面PAB.（6分）

（2）在$\triangle PAD$中，$AP=AD$，M是PD中点，所以$AM\perp PD$.

又因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，且$CD\perp AD$，

$CD\subset$平面$ABCD$，所以$CD\perp$平面PAD.又$AM\subset$平面PAD，所以$CD\perp AM$.

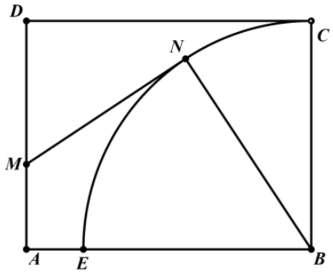
由$CD\perp AD$，$CD\perp AM$，又$PD\cap CD=D$，得$AM\perp$平面PCD.（12分）

18、本题满分14分，第（1）题6分，第（2）题8分

解：（1）$a_n=6n+2$（4分）$\{a_n\}$是以8为首项、6为公差的等差数列（6分）

（2）存在$a=\frac{1}{2},b=11$满足题意（14分）

19、本题满分 14 分，第（1）题 6 分，第（2）题 8 分



解：（1）过N作AB的垂线，垂足为F；过M作NF的垂线，垂足为G.

在$Rt\triangle BNF$中，$BF=16\cos\theta$，则$MG=AF=20-16\cos\theta$，

在$Rt\triangle MNG$中，$\angle MNG=\theta$，则$MN=\dfrac{20-16\cos\theta}{\sin\theta}$.

由题意易得$CN=16\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$.

因此，$W(\theta)=2a\bullet\dfrac{20-16\cos\theta}{\sin\theta}+a\bullet 16\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=8a\bullet\dfrac{5-4\cos\theta}{\sin\theta}+16a\bullet\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$.

$\cos\theta\in\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$.（6 分）

（2）$W'(\theta)=8a\bullet\dfrac{4-5\cos\theta}{\sin^2\theta}-16a=\dfrac{8a(2\cos\theta-1)(\cos\theta-2)}{\sin^2\theta}$

令$W'(\theta)=0$，得$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，又$\theta\in\left(\arccos\dfrac{4}{5},\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

于是当$\theta\in\left(\arccos\dfrac{4}{5},\dfrac{\pi}{3}\right)$时，$W'(\theta)<0$，$W(\theta)$单调递减.

当$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$W'(\theta)>0$，$W(\theta)$单调递增.

所以当$\theta=\dfrac{\pi}{3}$时，总造价W最小，最小值为$\left(16\sqrt{3}+\dfrac{8\pi}{3}\right)a$，此时$MN=8\sqrt{3}$，

$NG=4\sqrt{3}$，$NF=8\sqrt{3}$. 因此当$AM=4\sqrt{3}$米时，能使总造价W最小.（14 分）

20、本题满分 16 分，第（1）题 4 分，第（2）题 4 分，第（3）题 8 分

（1）$x^2+2y^2=1$（4 分）；

（2）$k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（8 分）；

（3）因为$A(1,0)$，$P(0,1)$，设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

可得直线AM的方程是：$y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$. 令$x=0$，得$y=-\dfrac{y_1}{x_1-1}$，

所以点S的坐标为$\left(0,-\dfrac{y_1}{x_1-1}\right)$. 同理可得：$T\left(0,-\dfrac{y_2}{x_2-1}\right)$.

所以$\overrightarrow{PS}=\left(0,-\dfrac{y_1}{x_1-1}-1\right)$，$\overrightarrow{PT}=\left(0,-\dfrac{y_2}{x_2-1}-1\right)$，而$\overrightarrow{PO}=(0,-1)$.

由$\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，可得$\lambda=\dfrac{y_1}{x_1-1}+1=\dfrac{kx_1+1}{x_1-1}+1$，同理$\mu=\dfrac{kx_2+1}{x_2-1}+1$.

由（2）得$x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{1}{2k^2+1}$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{kx_1+1}{x_1-1}+\dfrac{kx_2+1}{x_2-1}+2=\dfrac{2kx_1x_2+(1-k)(x_1+x_2)-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}+2$

$=\cdots=-\dfrac{1}{k+1}+2$，因为$k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\lambda+\mu=-\dfrac{1}{k+1}+2\in\left(\sqrt{2},2\right)$.（16 分）

21、（1）$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，当$a=0$时，$f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}$，

$f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x-1}{x^2}(x>0)$. 令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{1}{2}$.

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$上单调递减，在$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上是增函数.

所以$f(x)$的极小值是$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-2\ln 2$，无极大值.（4 分）

（2）$f'(x)=\dfrac{2-a}{x}-\dfrac{1}{x^2}+2a=\dfrac{2ax^2+(2-a)x-1}{x^2}=\dfrac{a\left(x+\dfrac{1}{a}\right)(2x-1)}{x^2}(x>0)$.

①当$-2<a<0$时，$-\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{2}$，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$和$\left[-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上是严格减函数，在$\left[\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{a}\right]$上是严格增函数；

②当$a=-2$时，$f'(x)=-\dfrac{(2x-1)^2}{x^2}\le 0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是严格减函数；

③当$a<-2$时，$-\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，$f(x)$在$\left(0,-\dfrac{1}{a}\right]$和$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上是严格减函数，在$\left[-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{2}\right]$上是严格增函数.（10 分）

（3）当$a\in(-3,-2)$时，由（2）可知$f(x)$在$[1,3]$上是严格减函数，

所以$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le f(1)-f(3)=\dfrac{2}{3}-4a+(a-2)\ln 3$.

由对任意的$a\in(-3,-2)$，x_1、$x_2\in[1,3]$，有$(m+\ln 3)a-2\ln 3>\left|f(x_1)-f(x_2)\right|$恒成立，得$(m+\ln 3)a-2\ln 3>\left|f(x_1)-f(x_2)\right|_{\max}$

故$(m+\ln 3)a-2\ln 3>\dfrac{2}{3}-4a+(a-2)\ln 3$对任意的$a\in(-3,-2)$恒成立，

即$m<\dfrac{2}{3a}-4$对任意的$a\in(-3,-2)$恒成立，

因为当$a\in(-3,-2)$时，$\dfrac{2}{3a}-4\in\left(-\dfrac{13}{3},-\dfrac{38}{9}\right)$，所以$m\le-\dfrac{13}{3}$.（18 分）